

*Ein computer-orientierter Algorithmus für die  
Traglastberechnung von Platten mittels der  
Fließlinientheorie*

Von der Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Stadtplanung der  
Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus zur Erlangung des  
akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation

vorgelegt von  
DIPL.-ING. JÖRN WEICHERT

aus Dahme/Mark

Gutachter:	Prof. Dr. Peter Osterrieder
Gutachter:	Prof. Dr. Karl Schweizerhof
Gutachterin:	Prof. M.Sc. Karen Eisenloffel
Tag der Disputation:	13. Juli 2006

---

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand aus meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl Statik und Dynamik an der BTU Cottbus.

Ich möchte all jenen sehr herzlich danken, die mir durch kritische Hinweise und zahlreiche ergiebige Diskussionen auf dem Weg der Erstellung dieser Dissertation geholfen haben. Ein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Peter Osterrieder für seine kritische und freundliche Betreuung der Arbeit, der mir in theoretischen und methodischen Fragen ein wertvoller Ansprechpartner war.

Gedankt sei ebenso Prof. Dr. Karl Schweizerhof und Prof. M.Sc. Karen Eisenloffel für die spontane Bereitschaft zur Begutachtung dieser Arbeit.

Vor allem danke ich meiner Familie, die meine promotionsabhängigen Launen ertragen musste, mir Mut machte und Kraft gab.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Grundlagen</b>	<b>1</b>
1 Motivation und Zielsetzung	3
2 Stand der Forschung	5
3 Berechnung der Traglast mit dem kinematischen Grenzwertsatz	7
<b>4 Definitionen - Einführungsbeispiel</b>	<b>11</b>
4.1 Einführungsbeispiel . . . . .	11
4.2 Fließlinienmuster 1 . . . . .	12
4.3 Wahl der Parameter . . . . .	14
4.4 Berechnung Fließlinienmuster 1 . . . . .	15
4.5 Fließlinienmuster 2 . . . . .	18
4.6 Fließlinienmuster 3 . . . . .	19
<b>5 Berechnung der virtuellen Arbeiten</b>	<b>23</b>
5.1 Virtuelle äußere Arbeit . . . . .	23
5.2 Virtuelle innere Arbeit . . . . .	23
<b>6 Fließbedingung</b>	<b>25</b>
6.1 Allgemeine Fließlinientheorie . . . . .	25
6.2 Isotrope Platten . . . . .	27
6.3 Orthotrope Stahlbetonplatten ohne Membranbeanspruchung . . . . .	27
6.4 Stahlplatten mit Membranbeanspruchung . . . . .	28
6.5 Plastische Momente für beliebige Werkstoffe . . . . .	31
6.6 Hinweise zur numerischen Bestimmung der plastischen Schnittgrößen	31
<b>7 Transformation</b>	<b>33</b>
7.1 Notwendigkeit einer Transformation . . . . .	33
7.2 Isotropie-Parameter . . . . .	35
7.3 Herleitung der Transformationsregeln . . . . .	36
<b>8 Weitere Betrachtungen</b>	<b>45</b>
8.1 Unterzüge und Steifen . . . . .	45

8.2	Gelenkiger Rand und Einspannung . . . . .	45
8.3	Symmetrie . . . . .	46
<b>II</b>	<b>Elementdefinition</b>	<b>49</b>
<b>9</b>	<b>Übersicht</b>	<b>51</b>
<b>10</b>	<b>Diskrete Fließlinien</b>	<b>53</b>
10.1	Gerade Fließlinien . . . . .	53
10.1.1	Allgemein . . . . .	53
10.1.2	Virtuelle innere Arbeit . . . . .	53
10.1.3	Virtuelle äußere Arbeit . . . . .	54
10.2	Gekrümmte Fließlinien . . . . .	55
10.2.1	Allgemein . . . . .	55
10.2.2	Virtuelle innere Arbeit . . . . .	57
10.2.3	Virtuelle äußere Arbeit . . . . .	58
<b>11</b>	<b>Plattensegmente</b>	<b>59</b>
11.1	Ebenes Plattensegment . . . . .	59
11.1.1	Virtuelle innere Arbeit . . . . .	59
11.1.2	Virtuelle äußere Arbeit . . . . .	59
11.2	Fächersegment aus rationalen Bézier-Splines . . . . .	61
11.2.1	Allgemein . . . . .	61
11.2.2	Ansatzfunktion des Fächersegments . . . . .	62
11.2.3	Verlauf der Fließlinien . . . . .	66
11.2.4	Virtuelle innere Arbeit . . . . .	67
11.2.5	Berücksichtigung der Transformation . . . . .	71
11.2.6	Virtuelle äußere Arbeit . . . . .	72
11.2.7	Numerische Integration . . . . .	73
<b>12</b>	<b>Grundlagen zur Spline-Berechnung</b>	<b>79</b>
12.1	Quadratische Gleichungssysteme . . . . .	79
12.2	Schnittpunkt Strecke – Splinekurve . . . . .	80
12.3	Schnittpunkt Splinekurve – Splinekurve . . . . .	81
12.4	Spline-Abschnitt . . . . .	82
12.5	Abstand Punkt – Spline . . . . .	83
12.6	Punkt auf Fächer . . . . .	84
<b>III</b>	<b>Anwendung</b>	<b>87</b>

<b>13 Problemdarstellung</b>	<b>89</b>
<b>14 Überblick über den Berechnungsablauf</b>	<b>93</b>
<b>15 Datenstruktur</b>	<b>97</b>
<b>16 Phase 1</b>	<b>103</b>
16.1 Programmablauf Phase 1 . . . . .	103
16.2 Aufbau des Fließlinienmusters in Phase 1 . . . . .	103
16.2.1 Allgemein . . . . .	103
16.2.2 Randgruppen . . . . .	105
16.2.3 Eckgruppen . . . . .	107
16.3 Bestimmung der inneren Punkte und Fließlinien . . . . .	133
16.3.1 Vorbemerkungen zum Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien . . . . .	133
16.3.2 Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien - Übersicht	135
16.3.3 Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien - ausführ- liche Darstellung . . . . .	138
16.3.4 Der Algorithmus an einem Beispiel . . . . .	142
16.3.5 Verbessern des Algorithmus . . . . .	149
16.4 Berechnung der Traglast . . . . .	149
16.5 Auswerten und Vereinfachen des Fließlinienmusters . . . . .	150
<b>17 Phase 2</b>	<b>153</b>
17.1 Auswahl der Plattenbereiche . . . . .	153
17.2 Aufbau des Fließlinienmusters . . . . .	153
17.3 Berechnen der Traglast . . . . .	155
<b>18 Phase 3</b>	<b>157</b>
18.1 Auswahl der Fließlinienmuster . . . . .	157
18.2 Einfügen der Fächer . . . . .	157
18.2.1 Schritt 1: Vorbereiten des Fließlinienmusters . . . . .	157
18.2.2 Schritt 2: Auswahl der Plattensegmente . . . . .	158
18.2.3 Schritt 3: Umwandeln der Ränder . . . . .	158
18.2.4 Schritt 4: Umwandeln der Punkte . . . . .	159
18.2.5 Schritt 5: Einsetzen des Fächers . . . . .	160
<b>19 Numerische Optimierung</b>	<b>163</b>
<b>20 Beispiele</b>	<b>167</b>
20.1 Beispiel 1: Quadratplatte mit konstanter Flächenlast . . . . .	167
20.1.1 Aufgabenstellung . . . . .	167
20.1.2 Variante 1 - gelenkige Lagerung . . . . .	168

20.1.3	Variante 2 - eingespannte Lagerung . . . . .	171
20.1.4	Variante 3 - gelenkige Lagerung mit $m_u^- = 0$ . . . . .	178
20.2	Beispiel 2: Orthotrope Stahlbetonrechteckplatte . . . . .	180
20.2.1	Aufgabenstellung . . . . .	180
20.2.2	Ermittlung der Traglast . . . . .	181
20.3	Beispiel 3: Isotrope Dreiecksplatte . . . . .	186
20.3.1	Aufgabenstellung . . . . .	186
20.3.2	Variante 1 - eingespannte Lagerung . . . . .	186
20.3.3	Variante 2 - eingespannte Lagerung mit Unterzug am freien Rand	189
20.3.4	Variante 3 - eingespannte Lagerung mit veränderter Geometrie	189
20.4	Beispiel 4: Einachsig gespannte Platte mit Einzellast . . . . .	191
20.4.1	Aufgabenstellung . . . . .	191
20.4.2	Berechnung der Traglast . . . . .	191
20.5	Beispiel 5: Stützenflansch eines steifenlosen Stirnplattenanschlusses .	198
20.5.1	Aufgabenstellung . . . . .	198
20.5.2	Berechnung der Traglast des unversteiften Stützenflansches . .	199
20.5.3	Ergänzung einer Rippe . . . . .	203
20.6	Beispiel 6: Punktgestützte Platte . . . . .	206
20.6.1	Aufgabenstellung . . . . .	206
20.6.2	Berechnung der Traglast . . . . .	206
20.7	Beispiel 7: Platte mit einspringender Ecke . . . . .	214
20.7.1	Aufgabenstellung . . . . .	214
20.7.2	Variante 1 - allseitig gelenkige Lagerung . . . . .	215
20.7.3	Variante 2 - zweiseitige Lagerung . . . . .	217
20.7.4	Variante 3 - dreiseitige Lagerung . . . . .	222
20.7.5	Variante 4 - dreiseitige Lagerung und Punktstützung unter der einspringenden Ecke . . . . .	224
<b>21</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>227</b>
<b>Anhang</b>		<b>228</b>
<b>A</b>	<b>Benutzung des Programms <math>\mathcal{FLX}</math></b>	<b>231</b>
A.1	Benutzeroberfläche . . . . .	231
A.1.1	Menübefehle . . . . .	231
A.1.2	Aktive Elemente . . . . .	232
A.1.3	Ausgabe-Anzeigen . . . . .	233
A.2	Beschreibung der Eingabedatei . . . . .	235
A.2.1	Aufbau einer XML-Eingabedatei . . . . .	235
A.2.2	Elemente der FLX-Datei . . . . .	236
A.2.3	Eingabedateien zu den Beispielen . . . . .	242



<b>B</b>	<b>Dokumentation zum Quelltext des Programms <math>\mathcal{FLX}</math></b>	<b>255</b>
B.1	Klassenübersicht . . . . .	255
<b>C</b>	<b>Gauss-Kronrod – Stützstellen und Gewichte</b>	<b>259</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>263</b>



# Symbolverzeichnis

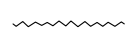
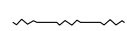
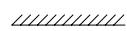

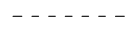


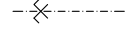
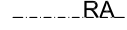

$\delta\Delta\theta$	virtuelle Relativverdrehung zweier Teilplatten . . . . .	23
$\delta\theta$	virtueller Drehwinkel einer Teilplatte . . . . .	23
$\delta\theta'$	Anstieg der virtuellen Verschiebungsfigur einer Ebene senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Referenzpunkte . . . . .	101
$\delta A$	virtuelle Arbeit . . . . .	7
$\delta A_a$	virtuelle äußere Arbeit . . . . .	7
$\delta A_i$	virtuelle innere Arbeit . . . . .	7
$\delta w$	virtuelle Verschiebung senkrecht zur $x,y$ -Ebene $x,y,\delta w$ ergibt ein Rechtssystem . . . . .	23
$\delta\kappa$	virtuelle Krümmung . . . . .	68
$\dot{x}, \dot{y}$	Ableitung der $x$ - bzw. $y$ -Koordinate einer Fließlinie nach der lokalen Koordinate $s$ . . . . .	31
$\lambda_T$	Traglastfaktor . . . . .	8
$\nu$	Querdehnzahl . . . . .	3
$\sigma$	Spannung, der Index gibt die Richtung der Spannung an. . . . .	28
$\sigma_f$	Fließspannung von Stahl . . . . .	28
$\sigma_v$	Vergleichsspannung . . . . .	28
$\varphi_\xi, \varphi_\eta$	Winkel der Hauptkrümmungsrichtungen $\xi$ und $\eta$ zur $x$ -Achse $\varphi_\eta = \varphi_\xi + \frac{\pi}{2}$ . . . . .	68
$\varphi$	Winkel einer Fließlinie zur $x$ -Achse . . . . .	7
$A$	Fläche . . . . .	39
$a_s$	Querschnittsfläche des Bewehrungsstahls . . . . .	28
$B_i^n(t)$	$i$ -tes Bernsteinpolynom $n$ -ten Grades . . . . .	55
$\dot{B}_i^n(t), \ddot{B}_i^n(t)$	Ableitungen der Bernsteinpolynome . . . . .	56
$c, a_i, b_i$	Fourier-Reihen-Koeffizienten . . . . .	31
$cl$	Abminderungsfaktor für das plastische Moment am eingespannten Rand	45
$d$	Plattendicke . . . . .	28
$IP$	Parameter zur Beschreibung der Isotropie-Eigenschaft einer Platte . . .	36
$L$	Länge . . . . .	39
$m$	Plattenbiegemomente Der Index des Moments gibt die Richtung an, in der Spannungen erzeugt werden. . . . .	54
$m_u$	plastisches Moment . . . . .	7
$M_u, M_u^+, M_u^-$	plastisches Moment eines Unterzugs bzw. einer Steife . . . . .	45

$m_u^+$	positives plastisches Moment . . . . .	54
$m_u^-$	negatives plastisches Moment ( $m_u^- < 0$ ) . . . . .	54
$N$	Nenner des Bruchs zur Berechnung der rationalen Bézier-Splines . . . . .	65
$n$	Plattenmembrankräfte . . . . .	28
$P$	Einzellast . . . . .	23
$P$	räumlicher Punkt, Kontrollpunkt . . . . .	63
$p, p_k$	Parameter . . . . .	9
$p_A$	Flächenlast . . . . .	23
$p_L$	Linienlast . . . . .	23
$r$	Richtungsvektor eine Linie . . . . .	54
$ws_i$	Gewichtsfaktor der Kontrollpunkte . . . . .	55
$ws_{i,j}$	Gewichtsfaktor der Kontrollpunkte . . . . .	63
$z$	Hebelarm der inneren Kräfte im Stahlbeton . . . . .	28
$\mathcal{D}$	Definitionsbereich . . . . .	163

## Koordinatensysteme

$x, y$	ebenes kartesisches Koordinatensystem . . . . .	7
$x', y'$	Koordinaten der Ersatzplatte . . . . .	36
$\xi, \eta$	Hauptkrümmungsrichtungen $\xi, \eta$ bilden ein orthonormales Rechtssystem. . . . .	68
$s, n$	lokales Koordinatensystem einer Fließlinie $s$ zeigt in Fließlinienrichtung, $n$ senkrecht dazu $s, n$ ergibt ein Rechtssystem . . . . .	7
$t$	lokales Koordinatensystem einer Splinekurve . . . . .	55
$t_1, t_2$	lokales Koordinatensystem einer Splinefläche . . . . .	63
$r, \varphi$	radiales Koordinatensystem . . . . .	193

### In Zeichnungen verwendete Symbole und Linienarten

	Fließlinie mit positivem plastischen Moment
	Fließlinie mit negativem plastischen Moment
	Eingespannter Plattenrand
	Navier-gelagerter Plattenrand
	Freier Plattenrand
	Unterzug / Steife
	Punktstützung
	Symmetrieachse
	Rotationsachse
	Neigungsrichtung eines ebenen Plattensegments

Bezeichnungen:

$F_i$	Fächersegmente
$E_i$	ebene Plattensegmente
$K_i$	Kanten / Fließlinien
$P_i$	Kontrollpunkte
$PE_i$	Platteneckpunkte



# Tabellenverzeichnis

4.1	Einführungsbeispiel - innere Arbeit der einzelnen Fließlinien . . . . .	16
4.2	Einführungsbeispiel - äußere Arbeit der einzelnen Plattensegmente . . .	17
11.1	Vergleich von verschiedenen Integrationsverfahren . . . . .	74
15.1	Kontrollpunkt-Typen . . . . .	100
16.1	Einteilung der Eckgruppen nach der Lagerung der Ränder . . . . .	108
16.2	Einteilung der Eckgruppen nach dem Platteninnenwinkel . . . . .	109
16.3	Eckgruppe $TypA = 11$ $TypB = 1$ . . . . .	110
16.4	Eckgruppe $TypA = 11$ $TypB = 2$ . . . . .	111
16.5	Eckgruppe $TypA = 11$ $TypB = 3$ . . . . .	111
16.6	Eckgruppe $TypA = 12$ $TypB = 1$ . . . . .	112
16.7	Eckgruppe $TypA = 12$ $TypB = 2$ . . . . .	113
16.8	Eckgruppe $TypA = 13$ $TypB = 1$ . . . . .	114
16.9	Eckgruppe $TypA = 13$ $TypB = 2$ . . . . .	115
16.10	Eckgruppe $TypA = 13$ $TypB = 3$ . . . . .	115
16.11	Eckgruppe $TypA = 14$ $TypB = 1$ . . . . .	116
16.12	Eckgruppe $TypA = 14$ $TypB = 2$ . . . . .	117
16.13	Eckgruppe $TypA = 14$ $TypB = 3$ . . . . .	118
16.14	Eckgruppe $TypA = 22$ $TypB = 1$ . . . . .	119
16.15	Eckgruppe $TypA = 23$ $TypB = 1$ . . . . .	120
16.16	Eckgruppe $TypA = 23$ $TypB = 2$ . . . . .	121
16.17	Eckgruppe $TypA = 23$ $TypB = 3$ . . . . .	122
16.18	Eckgruppe $TypA = 24$ $TypB = 1$ . . . . .	123
16.19	Eckgruppe $TypA = 24$ $TypB = 2$ . . . . .	124
16.20	Eckgruppe $TypA = 24$ $TypB = 3$ . . . . .	125
16.21	Eckgruppe $TypA = 33A$ $TypB = 1$ . . . . .	126
16.22	Eckgruppe $TypA = 33B$ $TypB = 1$ . . . . .	126
16.23	Eckgruppe $TypA = 33B$ $TypB = 2$ . . . . .	127
16.24	Eckgruppe $TypA = 34B$ $TypB = 1$ . . . . .	128
16.25	Eckgruppe $TypA = 34B$ $TypB = 2$ . . . . .	129
16.26	Eckgruppe $TypA = 44A$ $TypB = 1$ . . . . .	130
16.27	Eckgruppe $TypA = 44B$ $TypB = 1$ . . . . .	131
16.28	Eckgruppe $TypA = 44B$ $TypB = 2$ . . . . .	132

18.1	Umwandlung der Kontrollpunkt-Typen . . . . .	160
20.1	Eurocode 3, EN 1993-1-8:2005, Auszug . . . . .	201
20.2	Eurocode 3, EN 1993-1-8:2005, Auszug . . . . .	202
A.1	Elemente einer FLX-Datei . . . . .	236
B.1	Klassen im Programm $\mathcal{FLX}$ . . . . .	257
C.1	Gauss-Kronrod-7-15-Regel . . . . .	259
C.2	Gauss-Kronrod-10-21-Regel . . . . .	259
C.3	Gauss-Kronrod-15-31-Regel . . . . .	260
C.4	Gauss-Kronrod-20-41-Regel . . . . .	260
C.5	Gauss-Kronrod-25-51-Regel . . . . .	261
C.6	Gauss-Kronrod-30-61-Regel . . . . .	262



# Abbildungsverzeichnis

3.1	$s, n$ -Koordinatensystem der Fließlinie . . . . .	8
4.1	Einführungsbeispiel Rechteckplatte . . . . .	11
4.2	Fließlinienmuster 1 . . . . .	12
4.3	Fließlinienmuster 1b . . . . .	13
4.4	Fließlinienmuster 1c . . . . .	13
4.5	Fließlinienmuster 1d . . . . .	15
4.6	Fließlinienmuster 2 . . . . .	18
4.7	Fließlinienmuster 3 . . . . .	20
6.1	Fließbedingung für Fließlinien . . . . .	25
6.2	plastisches Moment in Abhängigkeit von der Richtung der Fließlinie . .	26
6.3	Vergleichsgrafik plastisches Moment in Abhängigkeit von der Richtung der Fließlinie . . . . .	27
6.4	Spannungsverlauf in der Stahlplatte . . . . .	30
7.1	Quadratplatte mit Einzellast . . . . .	34
7.2	Ersatzplatte mit transformierten Koordinaten . . . . .	34
7.3	Fließlinienmuster in transformierten Koordinaten - Kreisfächer . . . . .	35
7.4	Lösung der Ausgangsplatte - elliptischer Fächer . . . . .	35
7.5	affine Transformation . . . . .	37
7.6	plastisches Moment einer anisotropen Stahlbetonplatte . . . . .	41
7.7	plastisches Moment einer anisotropen Stahlbetonplatte . . . . .	42
8.1	Einspannstelle einer verstärkten Stahlplatte . . . . .	46
8.2	Fließlinienmuster bei symmetrischen Platten . . . . .	46
10.1	gerade Fließlinie . . . . .	53
10.2	Rationale Bézier-Splines bei Variation von $ws_1$ . . . . .	56
11.1	ebenes Plattensegment mit mehreren Lastbereichen . . . . .	60
11.2	Fließlinienfächer mit positiven und negativen Fließlinien . . . . .	62
11.3	3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur von Fächersegmenten mit Kontrollpunktnetz . . . . .	63
11.4	3D-Darstellung von ungültigen Splineflächen mit Kontrollpunktnetz . .	64
11.5	Fächer mit infinitesimalem Segment . . . . .	66
11.6	Kreisfächer aus vier Fächersegmenten . . . . .	71

11.7	Quadratplatte aus Beispiel 1 (Zwischenzustand) . . . . .	75
11.8	Stützstellen bei der numerischen Integration der inneren Arbeit des Fächersegments 13 im Beispiel 1 im Zwischenzustand . . . . .	76
11.9	Stützstellen bei der numerischen Integration der inneren Arbeit des Fächersegments 13 im Beispiel 1 im ausiterierten Zustand . . . . .	77
12.1	Schnittpunkt Strecke – Splinekurve . . . . .	80
12.2	Schnittpunkt Splinekurve– Splinekurve . . . . .	81
12.3	Spline-Abschnitt . . . . .	83
12.4	Beispiel für die Lage der Punkte relativ zum Fächer . . . . .	85
13.1	Trapezförmige Platte . . . . .	90
13.2	Dreieckplatte mit Randunterzug . . . . .	90
13.3	Rechteckplatte mit Einzellast . . . . .	90
13.4	Dreieckplatte mit Fließlinienfächern . . . . .	91
13.5	Eckplatte mit ebenen Plattensegmenten . . . . .	91
14.1	Flussdiagramm zum Auffinden des maßgebenden Fließlinienmusters . .	93
15.1	Beispiel eines Fließlinienmusters . . . . .	98
16.1	Programmablaufplan Phase 1 . . . . .	104
16.2	Randgruppe Typ 1 . . . . .	105
16.3	Randgruppe Typ 2 . . . . .	105
16.4	Randgruppe Typ 2 . . . . .	106
16.5	Randgruppe Typ 3 . . . . .	106
16.6	Randgruppe Typ 4 . . . . .	107
16.7	Eckgruppe $TypA = 11 \quad TypB = 1$ . . . . .	110
16.8	Eckgruppe $TypA = 11 \quad TypB = 2$ . . . . .	111
16.9	Eckgruppe $TypA = 11 \quad TypB = 3$ . . . . .	111
16.10	Eckgruppe $TypA = 12 \quad TypB = 1$ . . . . .	112
16.11	Eckgruppe $TypA = 12 \quad TypB = 2$ . . . . .	113
16.12	Eckgruppe $TypA = 13 \quad TypB = 1$ . . . . .	114
16.13	Eckgruppe $TypA = 13 \quad TypB = 2$ . . . . .	115
16.14	Eckgruppe $TypA = 13 \quad TypB = 3$ . . . . .	115
16.15	Eckgruppe $TypA = 14 \quad TypB = 1$ . . . . .	116
16.16	Eckgruppe $TypA = 14 \quad TypB = 2$ . . . . .	117
16.17	Eckgruppe $TypA = 14 \quad TypB = 3$ . . . . .	118
16.18	Eckgruppe $TypA = 22 \quad TypB = 1$ . . . . .	119
16.19	Eckgruppe $TypA = 23 \quad TypB = 1$ . . . . .	120
16.20	Eckgruppe $TypA = 23 \quad TypB = 2$ . . . . .	121
16.21	Eckgruppe $TypA = 23 \quad TypB = 3$ . . . . .	122
16.22	Eckgruppe $TypA = 24 \quad TypB = 1$ . . . . .	123

16.23	Eckgruppe $TypA = 24$ $TypB = 2$ . . . . .	124
16.24	Eckgruppe $TypA = 24$ $TypB = 3$ . . . . .	125
16.25	Eckgruppe $TypA = 33A$ $TypB = 1$ . . . . .	126
16.26	Eckgruppe $TypA = 33B$ $TypB = 1$ . . . . .	126
16.27	Eckgruppe $TypA = 33B$ $TypB = 2$ . . . . .	127
16.28	Eckgruppe $TypA = 34B$ $TypB = 1$ . . . . .	128
16.29	Eckgruppe $TypA = 34B$ $TypB = 2$ . . . . .	129
16.30	Eckgruppe $TypA = 44A$ $TypB = 1$ . . . . .	130
16.31	Eckgruppe $TypA = 44B$ $TypB = 1$ . . . . .	131
16.32	Eckgruppe $TypA = 44B$ $TypB = 2$ . . . . .	132
16.33	Geometrie Sechseckplatte . . . . .	133
16.34	Sechseckplatte mit Rand- und Eckgruppen . . . . .	134
16.35	Beispiel mit zwei möglichen Lösungen . . . . .	135
16.36	Programmablaufplan des Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließ- linien . . . . .	136
16.37	drei Plattensegmente mit mehreren möglichen Fließlinienverläufen . . .	140
16.38	drei Plattensegmente mit mehreren möglichen Fließlinienverläufen (drei- dimensionale Darstellung) . . . . .	140
16.39	drei Plattensegmente mit einem eindeutigen Verlauf der Fließlinien . . .	141
16.40	Sechseckplatte mit Randgruppen, Eckgruppen und inneren Fließlinien .	142
16.41	Sechseckplatte mit Richtungsvektoren $r_{1a}$ und $r_{1b}$ zwischen $E_3$ und $E_4$ .	143
16.42	Sechseckplatte mit Vektoren möglicher Fließlinien zwischen $E_3$ und $E_4$ .	144
16.43	Sechseckplatte mit Richtungsvektoren $r_{2a}$ und $r_{2b}$ zwischen $E_3$ und $E_5$ .	145
16.44	Sechseckplatte mit Vektoren möglicher Fließlinien zwischen $E_3$ und $E_5$ .	145
16.45	Sechseckplatte mit Richtungsvektoren $r_{2a}$ und $r_{2b}$ zwischen $E_3$ und $E_{10}$ .	146
16.46	Sechseckplatte nach drei weiteren Abarbeitungen von Schritt 3 . . . . .	147
16.47	Sechseckplatte, Plattensegment $E_3$ fertig . . . . .	147
16.48	Sechseckplatte, nach Bestimmung von Punkt $P_{19}$ . . . . .	148
16.49	Sechseckplatte, Plattensegment $E_5$ fertig . . . . .	148
17.1	Prinzip-Beispiel zu Phase 2 . . . . .	154
18.1	Ersetzen der geraden Fließlinien durch gekrümmte Fließlinien . . . . .	159
20.1	Beispiel Quadratplatte - System und Belastung . . . . .	167
20.2	Beispiel 1, Variante 1 - analytische Lösung, Fließlinienmuster mit virtueller Verschiebungsfigur . . . . .	168
20.3	Beispiel 1, Variante 1 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	169
20.4	Beispiel 1, Variante 2 - Fließlinienmuster analytische Lösung 1 . . . . .	171
20.5	Beispiel 1, Variante 2 - Fließlinienmuster analytische Lösung 2 . . . . .	172
20.6	analytische Lösung nach Fox, Darstellung entnommen aus [48] . . . . .	173
20.7	Beispiel 1, Variante 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	174

20.8	Beispiel 1, Variante 2 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	175
20.9	Beispiel 1, Variante 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ am Ende von Phase 1	176
20.10	Beispiel 1, Variante 3 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	179
20.11	Beispiel Rechteckplatte . . . . .	180
20.12	Beispiel 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	182
20.13	Beispiel 2 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ .	182
20.14	Beispiel 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ ohne Berücksichtigung der Transformation . . . . .	184
20.15	Beispiel 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ am Ende von Phase 1 . . . . .	185
20.16	Beispiel 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ , Zwischenergebnis . . . . .	185
20.17	Beispiel Dreiecksplatte . . . . .	186
20.18	Beispiel Dreiecksplatte Variante 3 . . . . .	187
20.19	Beispiel 3, Variante 1 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	187
20.20	Beispiel 3, Variante 1 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	188
20.21	Beispiel 3, Variante 1 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ am Ende von Phase 1	188
20.22	Beispiel 3, Variante 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	189
20.23	Beispiel 3, Variante 3 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	190
20.24	Beispiel Einzellast . . . . .	191
20.25	einfaches Fließlinienmuster mit geraden Fließlinien . . . . .	192
20.26	Fließlinienmuster mit zusätzlichem Segment . . . . .	192
20.27	logarithmische Spirale . . . . .	193
20.28	Beispiel 4 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	196
20.29	Beispiel 4 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ .	196
20.30	Beispiel 4 - Fließlinienmuster $\mathcal{FLX}$ am Ende von Phase 1 aus . . . . .	197
20.31	Ergebnis Programm $\mathcal{FLX}$ . . . . .	197
20.32	steifenloser Stirnplattenanschluss . . . . .	198
20.33	Beispiel 5, unversteift - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	203
20.34	versteifter Stirnplattenanschluss . . . . .	204
20.35	Beispiel 5, versteift - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	205
20.36	Beispiel Punktgestützte Platte, System und Belastung . . . . .	206
20.37	Fließlinienmuster 1 und virtuelle Verschiebungsfigur . . . . .	207
20.38	Fließlinienmuster 2 und virtuelle Verschiebungsfigur . . . . .	208
20.39	Beispiel 6, Variante 1 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	210
20.40	Beispiel 6, Variante 1 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	211
20.41	Beispiel 6, Variante 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	212
20.42	Beispiel 6, Variante 2 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	213
20.43	Beispiel Platte mit einspringender Ecke . . . . .	214
20.44	Beispiel 7, Variante 1 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	215

20.45	Beispiel 7, Variante 1 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	216
20.46	Beispiel 7, Variante 1 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ am Ende von Phase 1	216
20.47	analytische Lösung - Fließlinienmuster und virtuelle Verschiebungsfigur	217
20.48	analytische Lösung in Abhängigkeit von $x_F$ . . . . .	219
20.49	Beispiel 7, Variante 2 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	220
20.50	Beispiel 7, Variante 2 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	220
20.51	Beispiel 7, Variante 2 - Fließlinienmuster des lokalen Minimums aus $\mathcal{FLX}$	221
20.52	Beispiel 7, Variante 3 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	222
20.53	Beispiel 7, Variante 3 - Fließlinienmuster nach Ramsay/Johnson . . . .	223
20.54	Beispiel 7, Variante 3 - Fließlinienmuster mit lokalem Minimum der Traglast, aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	223
20.55	Beispiel 7, Variante 4 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	224
20.56	Beispiel 7, Variante 4 - 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus $\mathcal{FLX}$ . . . . .	225
20.57	Beispiel 7, Variante 4 - Fließlinienmuster nach Ramsay/Johnson . . . .	225
20.58	Beispiel 7, Variante 4 - Fließlinienmuster aus $\mathcal{FLX}$ am Ende von Phase 1	226
A.1	Programm $\mathcal{FLX}$ . . . . .	231



# Teil I

## Grundlagen





# 1 Motivation und Zielsetzung

Zum Nachweis plattenförmiger Bauteile werden in der Baupraxis heute überwiegend numerische Berechnungsprogramme verwendet. Die lineare Strukturberechnung - meist mit der FE-Methode - basiert dabei auf der Annahme eines linearen Werkstoffverhaltens. Wird als Tragfähigkeitskriterium der sich daran anschließenden Bemessungsaufgabe das Erreichen der elastischen Grenzspannung an der höchstbeanspruchten Stelle der Platte gewählt, führt dies i.d.R. zu einer äußerst konservativen, d.h. unwirtschaftlichen Dimensionierung der Platte. Erhebliche Tragreserven infolge des tatsächlich nichtlinearen Werkstoffverhaltens bleiben dabei ungenutzt. Auch die im Stahlbetonbau bislang übliche Traglastbemessung des Querschnittes auf der Grundlage einer elastischen Strukturberechnung schöpft das Tragfähigkeitspotenzial einer Platte nicht aus. Da sich die Schnittkraftverteilung im Traglastzustand grundsätzlich von der im elastischen Zustand unterscheidet, ist dieses Verfahren darüber hinaus aus mechanischer Sicht inkonsistent. Daher wird in den aktuellen nationalen und europäischen Regelwerken für Stahlbetontragwerke DIN 1045-1(2001) (Abschnitt 8.4: Verfahren nach der Plastizitätstheorie) und EC2 (Abschnitt 2.5.3.5.3: zulässige Berechnungsverfahren für die Schnittgrößenermittlung bei Platten) die Berechnung und Bemessung von Trägern und Platten nach der Fließlinientheorie erstmals explizit zugelassen.

Da ein Plattentragwerk ein innerlich statisch unbestimmtes System darstellt, sind nach Erreichen der elastischen Grenztragfähigkeit an einer Stelle nicht nur Tragfähigkeitsreserven des Querschnittes sondern darüber hinaus i.d.R. erhebliche Systemreserven nutzbar. Dies kann sehr anschaulich am Fall einer naviergelagerten Quadratplatte mit konstanter Flächenlast  $q$  gezeigt werden. Die Tragfähigkeit einer Platte mit der Seitenlänge  $a$  und der Querschnittstragfähigkeit  $m_u$  ergibt sich im Rahmen einer elastisch-plastischen Berechnung für  $\nu = 0$  zu  $q = 21.6 \frac{m_u}{a^2}$ , und für  $\nu = 0.3$  zu  $q = 20.9 \frac{m_u}{a^2}$ . Die Traglast nach Fließlinientheorie beträgt demgegenüber  $q = 24 \frac{m_u}{a^2}$  und erlaubt somit einen Zuwachs von 11.1 % bzw. 14.8 %.

Die plastische Traglastberechnung von Platten nach der Fließlinientheorie basiert auf der kinematischen Methode der Traglasttheorie. Danach führt eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem beliebigen kinematisch zulässigen System zu einer oberen Schranke für die wirkliche Traglast des Systems. Die unterste aller oberen Schranken ist die Traglast des Systems. Die manuelle Berechnung einer Platte nach Fließlinientheorie setzt nicht nur detaillierte Kenntnisse des Verfahrens voraus, sondern erfordert es, das Verhalten der Platte im Traglastzustand abzuschätzen, um daraus das maßgebende Fließlinienmuster ableiten zu können.

Die Berechnung von Platten nach der Fließlinientheorie mit Berechnungsprogrammen erforderte in den bisherigen Arbeiten entweder eine intensive Benutzerinteraktion (Ramsay, Johnson [38, 39], Thavalingam, Jennings [30, 31], Gohnert [22, 23]) oder war auf die Untersuchung jeweils spezieller Probleme beschränkt (Liu [44]). Entsprechend ist kommerzielle Software für den universellen Einsatz bislang nicht verfügbar.

*Ziel dieser Arbeit ist es daher, einen Algorithmus zu entwickeln, der mit minimaler Anwenderinteraktion Lösungen für die Tragfähigkeit komplexer Plattenprobleme nach Fließlinientheorie ermöglicht.*

Der Algorithmus erfasst Platten mit beliebiger Geometrie, mit Aussparungen und Öffnungen im Inneren und beliebiger Lagerung, also auch Punkt- oder Linienlager im Platteninneren. Es werden Änderungen der Tragfähigkeit berücksichtigt, die beispielsweise durch gestaffelte Bewehrung oder durch aufgeschweißte Verstärkungsbleche entstehen. Einwirkungen aus Flächen-, Linien- und konzentrierten Lasten sind sowohl be- als auch entlastend wirkend zu untersuchen.

## 2 Stand der Forschung

### Grundlegende Arbeiten zur Fließlinientheorie

Die Traglastberechnung mittels Fließlinien wurde erstmals von K.W. Johansen in seinem Buch „Yield-line Theory“ [32] beschrieben. Neben der Fließlinientheorie für Platten beschreibt er auch eine Fließflächentheorie für voluminöse Bauteile. Bei dem 1962 erschienenen Werk handelt es sich um die erste ausführliche wissenschaftliche Veröffentlichung zur Fließlinien- und Fließflächentheorie. Mit seinem zweiten Buch „Yield-Line Formulae for Slabs“ [33] bringt K.W. Johansen 1972 ein für die Praxis geschriebenes Buch, in dem für eine Reihe von Standardsystemen die maßgebenden Fließlinienmuster und die dazugehörige Traglast aufgelistet sind.

L.L.Jones und R.H. Wood bringen 1967 mit „Yield-line analysis of Slabs“ [40] ein sehr ausführliches Standardwerk über Fließlinienberechnungen. Dieses Buch gilt bis heute als eines der wichtigsten Grundlagenwerke auf diesem Gebiet.

In neuerer Zeit ist mit „Limit Analysis of Plates“ [48] von Antoni Sawczuk ein weiteres sehr empfehlenswertes Buch erschienen. Neben einem umfangreichen Theorieteil zu den Grundlagen der Fließlinientheorie ist im Anhang auch ein Katalog mit zahlreichen Beispielen enthalten, in dem das maßgebende Fließlinienmuster und die erforderliche Tragfähigkeit für verschiedenste Plattentragwerke auflistet.

Die Fließlinientheorie ist heute eine anerkannte Standardmethode für die Traglastberechnung von Platten, insbesondere im Stahlbeton- und im Stahlbau.

### Computergestützte Fließlinienberechnung

Mit dem zunehmend verbreiteten Computereinsatz gab es auch erste Versuche, einen computergerechten Algorithmus für die Fließlinienberechnung von Platten zu entwerfen. In dem von A.C.A. Ramsay und D. Johnson veröffentlichten Ansatz [38, 39] hat der Anwender ein Netz von Linien vorzugeben, an denen entlang Fließlinien auftreten können. Das Ergebnis ist vom vorgegebenen Netz abhängig, so dass in der Regel ein Fließlinienmuster ermittelt wird, das nur sehr grob mit dem wirklichen Versagensmuster übereinstimmt.

A. Thavalingam und A. Jennings [30, 31] benutzen eine numerische Optimierung, um ein vom Anwender vorgegebenes Fließlinienmuster so zu verändern, dass die errechnete Traglast minimal wird. Die Topologie, d.h. der qualitative Aufbau des Fließlinienmusters aus Knoten und deren Verbindung durch Fließlinien bleibt unverändert. Lediglich die Lage der Knoten wird optimiert. Die Eingabe des zu optimierenden Musters erfordert allerdings ein umfangreiches Know-How vom Anwender, so dass das Programm eher als Rechenhilfe denn als Traglastermittlungsroutine anzusehen ist.

Liu [44] setzt ebenfalls eine Methode der numerischen Optimierung ein. Das Fließlinienmuster wird durch die Rotationsachsen und die Drehwinkel der einzelnen ebenen Plattensegmente festgelegt. Dieser Ansatz ist flexibler als die oben genannten, da die Topologie des Fließlinienmusters nicht von vornherein feststehen muss. Die Rotationsachsen werden von Liu entlang gestützter Ränder und durch Einzelstützungen festgelegt. Aufgrund der Einschränkungen bei der Wahl der Rotationsachsen ist das Verfahren nur für konvexe Platten geeignet. Weitere Effekte, wie beispielsweise Eckfächer werden nicht berücksichtigt.

Einen Versuch, die Fließlinientheorie in die Finite Elemente Methode zu integrieren liefert M. Gohnert in [22,23]. Doch auch hier können, ähnlich wie bei Ramsay/Johnson Fließlinien nur an bestimmten Stellen im Element auftreten. Da das Elementnetz fest vorgegeben ist, ist die Flexibilität beim Finden des maßgebenden Fließlinienmusters stark eingeschränkt.

Die vorliegende Arbeit ähnelt vom Ansatz her der Methode von T.C. Liu. Der hier entwickelte Algorithmus ist jedoch bezüglich der Ermittlung des Fließlinienmusters wesentlich flexibler und kann auch Fließlinienfächer in Plattenecken oder unter Einzellasten berücksichtigen.

### 3 Berechnung der Traglast mit dem kinematischen Grenzwertsatz

Der Traglastfaktor  $\lambda_T$  berechnet sich im Rahmen des kinematischen Grenzwertsatzes aus einer Gleichgewichtsbetrachtung nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen besagt:

*Bei einer virtuellen Verschiebung eines starren Körpers aus einer Gleichgewichtslage heraus ist die virtuelle Arbeit des angreifenden Kräftesystems gleich Null.*

*Eine virtuelle Verschiebung ist dabei eine differentiell kleine, gedachte Verschiebung, die geometrisch zulässig ist.*

Bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in der Baustatik werden üblicherweise so viele geometrische Bindungen entfernt, bis ein kinematisches System entsteht. Bei Stabwerken werden Stabgelenke (Momenten-, Querkraft- oder Normalkraftgelenke), bei Flächentragwerken werden Gelenklinien eingefügt, so dass die virtuellen Verschiebungen Starrkörperverschiebungen sind.

Das bei der Berechnung der virtuellen Arbeit  $\delta A$  zu berücksichtigende Kräftesystem enthält neben den angreifenden äußeren Kräften (Lasten) auch die inneren Kräfte (Schnittgrößen oder Auflagerkräfte) an den Stellen der entfernten geometrischen Bindungen. Dementsprechend wird bei der Berechnung der virtuellen Arbeit auch zwischen der *virtuellen äußeren Arbeit*  $\delta A_a$  der äußeren Kräfte und der *virtuellen inneren Arbeit*  $\delta A_i$  der inneren Kräfte unterschieden.

Bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen zur Traglastberechnung werden die geometrischen Bindungen an Stellen entfernt, an denen die zu ersetzenden inneren Kräfte bekannt sind. Bei Stabwerken sind dies die Fließgelenke, bei Flächentragwerken die *Fließlinien*. In Fließgelenken entspricht die innere Kraft dem vollplastischen Moment  $M_u$  (oder auch der vollplastischen Normalkraft  $N_u$  bzw. der vollplastischen Querkraft  $Q_u$ ). In den Fließlinien entspricht die innere Kraft, das Plattenbiegemoment, dem plastischen Grenzmoment  $m_u$ .

Zusätzlich zum globalen  $x,y$ -Koordinatensystem wird das lokale Koordinatensystem einer Fließlinie (3.1) definiert. In Anlehnung an [32] werden die Koordinaten einer Fließlinie mit  $s,n$  bezeichnet.  $s$  zeigt in die Richtung der Fließlinie,  $n$  ist der Normalenvektor senkrecht dazu. Das Koordinatensystem  $s,n$  ist ein Rechtssystem. Der Winkel  $\varphi$  gibt den Winkel einer Fließlinie zur  $x$ -Achse an.

Die virtuelle äußere Arbeit ergibt sich aus den gegebenen äußeren Kräften, die innere Arbeit aus den bekannten plastischen Grenzschnittgrößen des Systems.

Zur Herstellung des Gleichgewichts wird bei der Berechnung der virtuellen Arbeit der Anteil der äußeren Arbeit mit einem (unbekannten) Faktor  $\lambda_T$  multipliziert. Dieser

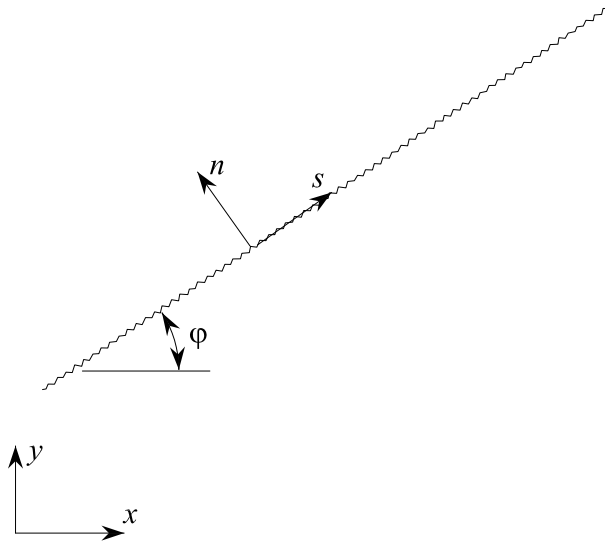


Abbildung 3.1:  $s,n$ -Koordinatensystem der Fließlinie

Traglastfaktor  $\lambda_T$  gibt an, das Wievielfache der äußeren Last vorhanden sein muss, damit das System in dem angenommenen Versagenszustand im Gleichgewicht ist. Oder anders ausgedrückt: Der Traglastfaktor  $\lambda_T$  gibt an, das Wievielfache der äußeren Last das System aufnehmen kann, bis es gemäß des angenommenen Versagenszustandes versagt.

Die virtuelle Arbeit im Versagenszustand berechnet sich demnach zu:

$$\delta A = \delta A_i + \lambda_T \delta A_a = 0 \quad (3.1)$$

Der gesuchte Traglastfaktor ist dann:

$$\lambda_T = \frac{-\delta A_i}{\delta A_a} \quad (3.2)$$

Wie oben beschrieben sind bei der Traglastberechnung nach dem kinematischen Grenzwertsatz Annahmen zur Lage der Fließgelenke bzw. der Fließlinien zu treffen. Sollte diese Annahme fehlerhaft sein, so gibt es innerhalb des Systems Stellen, an denen im angenommen Versagenszustand die Materialbedingung nicht eingehalten wird. Das heißt die plastische Grenztragfähigkeit des Querschnitts wird an diesen Stellen überschritten. Damit ist die errechnete Traglast zu groß, der errechnete Traglastfaktor bildet eine obere Schranke für die Traglast der Platte.

Nur wenn der angenommene Versagenszustand mit der Versagensfigur des Traglastzustandes übereinstimmt, wird auch die wirkliche Traglast errechnet. Unter allen möglichen Versagenszuständen gilt es folglich denjenigen mit der kleinsten Traglast zu finden. Während die Stellen der Fließgelenke von Stabwerken vergleichsweise einfach zu ermitteln sind, muss bei Flächentragwerken ein komplexes Muster aus Fließlinien gefunden werden.

---

Dazu ist das *Fließlinienmuster* auf eine geeignete Weise durch eine Reihe von Parametern  $p$  zu beschreiben, und der Traglastfaktor  $\lambda_T(p)$  in Abhängigkeit dieser Parameter zu bestimmen. Anschließend ist ein Optimierungsproblem zu lösen, das den minimalen Funktionswert von  $\lambda_T(p)$  ermittelt. Dazu gibt es in der numerischen und der analytischen Mathematik eine Vielzahl von Optimierungsalgorithmen, die hier benutzt werden können.

Viele Optimierungsalgorithmen benötigen die erste und einige auch die zweite Ableitung des Traglastfaktors nach den Optimierungsparametern  $p_k$ :

$$\lambda_{T,p_k} = \frac{1}{\delta A_a} (-\delta A_{i,p_k} - \lambda \delta A_{a,p_k}) \quad (3.3)$$

$$\lambda_{T,p_k p_l} = \frac{1}{\delta A_a} (-\delta A_{i,p_k p_l} - \lambda_{,p_k} \delta A_{a,p_l} - \lambda_{,p_l} \delta A_{a,p_k} - \lambda \delta A_{a,p_k p_l}) \quad (3.4)$$





## 4 Definitionen - Einführungsbeispiel

In diesem Kapitel wird anhand eines Beispiels der für eine Fließlinienberechnung durchzuführende Rechengang dargestellt und die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Begriffe eingeführt und erklärt. Inhalt dieses Kapitels ist es nicht, die erforderlichen Formeln anzugeben. Die hier verwendeten Formeln für die Berechnung der inneren und der äußeren Arbeit werden im Teil II dieser Arbeit hergeleitet bzw. erläutert.

### 4.1 Einführungsbeispiel

Gegeben ist eine eingespannt gelagerte, rechteckige Stahlbetonplatte. Diese wird durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastet.

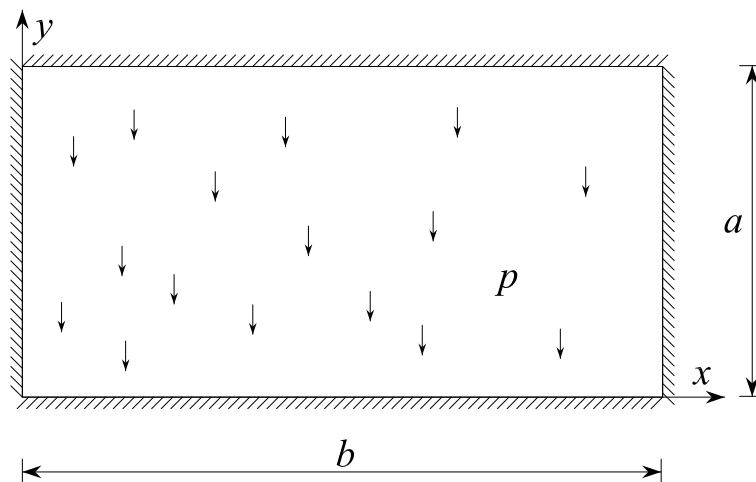


Abbildung 4.1: System

Die Eingangsdaten für die Berechnung sind:

- Seitenlängen:  $a = 4.8m$  und  $b = 9.6m$
- Flächenlast:  $p = 10kN/m^2$
- positives plastisches Grenzmoment in  $x$ -Richtung:  $m_{u,x}^+ = 2.19kNm/m$
- negatives plastisches Grenzmoment in  $x$ -Richtung:  $m_{u,x}^- = -13.17kNm/m$
- positives plastisches Grenzmoment in  $y$ -Richtung:  $m_{u,y}^+ = 9.22kNm/m$

- negatives plastisches Grenzmoment in  $y$ -Richtung:  $m_{u,y}^- = -19.20 kNm/m$

## 4.2 Fließlinienmuster 1

Für das erste untersuchte Fließlinienmuster wird angenommen, dass Fließlinien mit einem positiven plastischen Moment von jeder Plattenecke ausgehen. Gleichzeitig treten Fließlinien mit dem negativen plastischen Moment entlang der Plattenränder auf (Abbildung 4.2). In dieser Arbeit werden abkürzend auch die Begriffe *positive Fließlinie* bzw. *negative Fließlinie* verwendet.

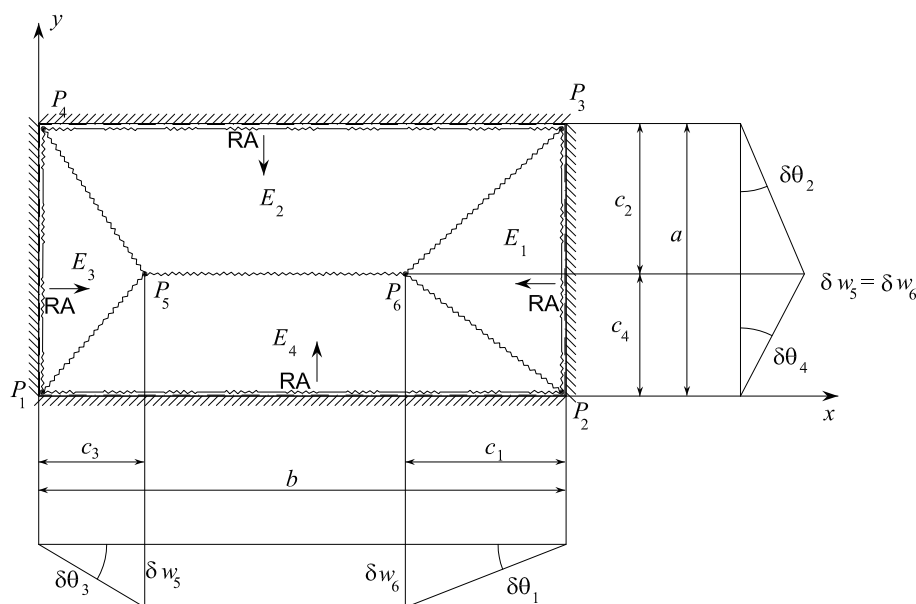


Abbildung 4.2: Fließlinienmuster 1

Durch die Fließlinien wird die Platte in vier Teile unterteilt. Diese Teile werden *Plattensegmente* genannt. Die Neigungsrichtung der ebenen Plattensegmente in der virtuellen Verschiebungsfigur ist in Abbildung 4.2 durch Pfeile angegeben. Der Umriss jedes Plattensegments wird aus einem Polygon bestehend aus positiven und negativen Fließlinien gebildet. An gelenkig gelagerten Rändern entsteht keine Fließlinie, da das Biegemoment entlang des Randes Null ist. Im Umriss eines Plattensegments an einem gelenkig gelagerten Rand muss diese Linie dennoch als *Dummy-Fließlinie* berücksichtigt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird auch der Überbegriff *Kante* für alle Fließlinien und Dummy-Fließlinien verwendet. Die virtuelle Verschiebungsfigur (s. Kapitel 3) wird so gewählt, dass entlang dieser Fließlinien Gelenklinien angenommen werden. In der virtuellen Verschiebungsfigur bleiben diese Plattensegmente eben (d.h. die virtuelle Verschiebung jedes Punktes des Plattensegmentes lässt sich durch eine Ebenengleichung in der Form  $\delta w(x, y) = a \cdot x + b \cdot y$  beschreiben). Diese Plattensegmente

werden daher als *ebene Plattensegmente* bezeichnet. Die ebenen Plattensegmente verdrehen sich in der virtuellen Verschiebungsfigur um ihre *Rotationsachse* ( $RA$ ).

Der Abstand zwischen den Fließlinien ist deutlich größer Null und gleichzeitig ist auch die virtuelle Verdrehung in den Fließlinien ungleich Null. Für diese Fließlinien wird im Folgenden die Bezeichnung *diskrete Fließlinien* verwendet.

Der Begriff der *Topologie* eines Fließlinienmusters beschreibt die qualitative Form des Fließlinienmusters. Zwei Fließlinienmuster sind topologisch identisch, wenn sie sich durch Verformen bzw. Verzerren des Fließliniennetzes ineinander überführen lassen.

So besitzt beispielsweise das Fließlinienmuster 1b in Abbildung 4.3 eine andere Topologie als das Fließlinienmuster in Abbildung 4.2. Das Muster 1c in Abbildung 4.4 hingegen hat dieselbe Topologie wie das Fließlinienmuster in Abbildung 4.2, da sich Abbildung 4.4 nur durch eine Verschiebung der Punkte  $P_5$  und  $P_6$  von dem Fließlinienmuster in Abbildung 4.2 unterscheidet. Die Muster sind *topologisch identisch*.

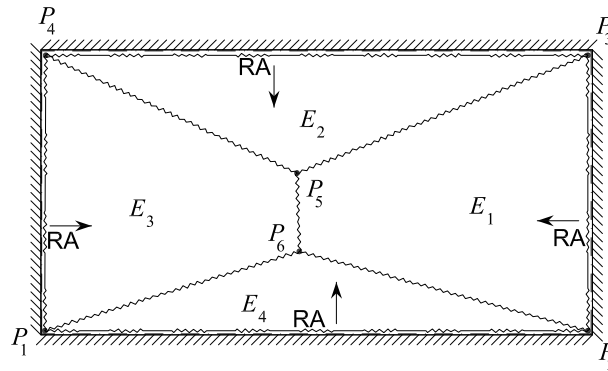


Abbildung 4.3: Fließlinienmuster 1b

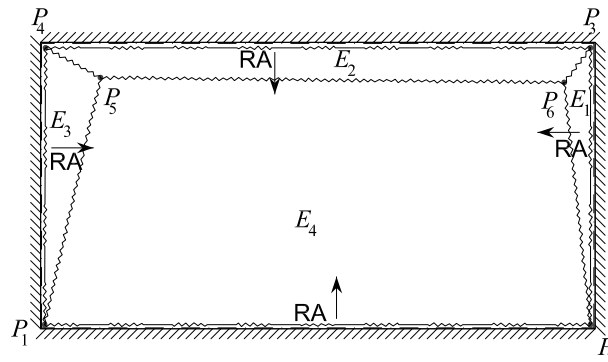


Abbildung 4.4: Fließlinienmuster 1c

## 4.3 Wahl der Parameter

Um das Fließlinienmuster parametrisch zu beschreiben gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten:

**Low-Level-Parameter:** Angabe der Koordinaten aller Fließlinienendpunkte sowie der dazugehörigen Topologie

**High-Level-Parameter:** Angabe von Parametern zur Beschreibung virtuellen Verschiebung der Plattensegmente (z.B. Lage der Rotationsachse und Verdrehungswinkel)

Die Low-Level-Parameter des Beispiels Fließlinienmuster 1 bestehen aus den Angaben, dass die Punkte  $P_1$  bis  $P_4$  mit dem jeweiligen Eckpunkt zusammenfallen sowie aus den Koordinaten der Punkte  $P_5$  und  $P_6$ . Zusätzlich gehört auch die Angabe der Topologie des Fließlinienmusters, also wie die Punkte durch Fließlinien verbunden sind.

Eine ausschließliche Verwendung von Low-Level-Parametern ist nicht sinnvoll. Dies würde bedeuten, dass man beispielsweise im Fließlinienmuster 1 aus Abbildung 4.2 die Lage der Punkte  $P_5$  und  $P_6$  so lange optimiert, bis das maßgebende Fließlinienmuster gefunden wird. Dabei ist es jedoch nicht möglich, die Topologie des untersuchten Fließlinienmusters zu verändern. Sollte das maßgebende Fließlinienmuster also wie Abbildung 4.3 aussehen, so wird es mit dieser Methode nicht gefunden.

Zusätzlich gibt es Abhängigkeiten zwischen den Parametern, die zu beachten sind. Während beim Fließlinienmuster aus Abbildung 4.2 noch leicht einzusehen ist, dass die  $y$ -Koordinaten und die virtuelle Verschiebung  $\delta w$  der Punkte  $P_5$  und  $P_6$  übereinstimmen müssen, sind diese Abhängigkeiten bei komplexeren Fließlinienmustern nicht mehr so einfach anzugeben. (Das Fließlinienmuster 1d in Abbildung 4.5 ist zwar topologisch identisch zum Fließlinienmuster 1 und somit über dieselben Low-Level-Parameter beschreibbar, aus den Fließlinien des Musters 1d ergibt sich jedoch keine kinematisch verträgliche virtuelle Verschiebungsfigur.)

Die Verwendung der High-Level-Parameter ermöglicht es hingegen, unterschiedliche Topologien gemeinsam zu untersuchen. Im Beispiel des Fließlinienmusters 1 wäre die Lage der Rotationsachsen der Plattensegmente dadurch definiert, dass die Rotationsachsen mit den Plattenrändern zusammenfallen sollen. Zusätzlich sind die Verdrehungswinkel  $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_4$  als Parameter zu berücksichtigen.

Je nach Betrag der Verdrehungswinkel können beide für dieses Beispiel mögliche Topologien auftreten. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten und den virtuellen Verschiebungen von  $P_5$  und  $P_6$  sind automatisch erfüllt.

Diese höhere Flexibilität bei der Ermittlung der Fließlinienmuster aus den High-Level-Parametern erkauft man sich jedoch durch einen erhöhten Rechenaufwand. Um die inneren und äußeren Arbeiten sowie letztendlich die Traglast bestimmen zu können, müssen aus den High-Level-Parametern erst die Werte der Low-Level-Parameter ermittelt werden.

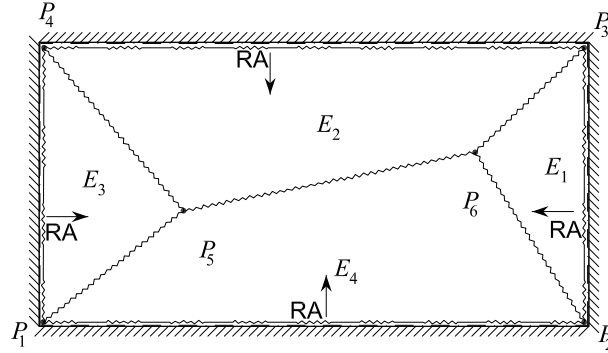


Abbildung 4.5: Fließlinienmuster 1d

In Teil III dieser Arbeit wird die Vorgehensweise zur Ermittlung des maßgebenden Fließlinienmusters beschrieben. In den Phasen 1 und 2 der Berechnung wird dabei mit den High-Level-Parametern gearbeitet. In Phase 3, wenn die Topologie nicht mehr verändert wird, werden nur noch die Low-Level-Parameter benutzt.

## 4.4 Berechnung Fließlinienmuster 1

Zu Beginn einer Berechnung werden die Parameter definiert und mit zufälligen (aber sinnvollen) Werten initialisiert.

In dem Beispiel zum Fließlinienmuster 1 (Abbildung 4.2) sind dies die Parameter  $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_4$ .

Daraus erhält man die übrigen Größen (Low-Level-Parameter):

$$\begin{aligned} c_1 &= a \cdot \frac{1}{\delta\theta_1} \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \\ c_2 &= a \cdot \frac{\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \\ c_3 &= a \cdot \frac{1}{\delta\theta_3} \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \\ c_4 &= a \cdot \frac{\delta\theta_2}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sollte sich  $c_1 + c_3 > b$  ergeben, so weist das durch  $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_4$  beschriebene Fließlinienmuster eine Topologie nach Abbildung 4.3 auf.

Die virtuellen Verschiebungen sind:

$$\delta w_5 = \delta w_6 = a \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \tag{4.2}$$

Die innere Arbeit der einzelnen Fließlinien wird nach Gleichung 10.2 berechnet und ist in Tabelle 4.1 aufgelistet. Für die gesamte innere Arbeit der Platte erhält man:

$$-\delta A_i = (m_{u,x}^+ - m_{u,x}^-) \cdot a \cdot (\delta\theta_1 + \delta\theta_3) + (m_{u,y}^+ - m_{u,y}^-) \cdot b \cdot (\delta\theta_2 + \delta\theta_4) \quad (4.3)$$

Fließlinie	$-\delta A_i =$
$P_1 - P_2$	$-m_{u,y}^- b \delta\theta_4$
$P_3 - P_4$	$-m_{u,y}^- b \delta\theta_2$
$P_1 - P_4$	$-m_{u,x}^- a \delta\theta_3$
$P_2 - P_3$	$-m_{u,x}^- a \delta\theta_1$
$P_5 - P_6$	$m_{u,x}^+ \left( b(\delta\theta_2 + \delta\theta_4) - a \left( \frac{1}{\delta\theta_1} + \frac{1}{\delta\theta_3} \right) \delta\theta_2 \delta\theta_4 \right)$
$P_1 - P_5$	$m_{u,x}^+ a \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_3}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} + m_{u,y}^+ a \frac{\delta\theta_4}{\delta\theta_3} \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4}$
$P_2 - P_6$	$m_{u,x}^+ a \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_1}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} + m_{u,y}^+ a \frac{\delta\theta_4}{\delta\theta_1} \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4}$
$P_3 - P_6$	$m_{u,x}^+ a \frac{\delta\theta_4 \delta\theta_1}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} + m_{u,y}^+ a \frac{\delta\theta_2}{\delta\theta_1} \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4}$
$P_4 - P_5$	$m_{u,x}^+ a \frac{\delta\theta_4 \delta\theta_3}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} + m_{u,y}^+ a \frac{\delta\theta_2}{\delta\theta_3} \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4}$
total	$(m_{u,x}^+ - m_{u,x}^-) a (\delta\theta_1 + \delta\theta_3) + (m_{u,y}^+ - m_{u,y}^-) b (\delta\theta_2 + \delta\theta_4)$

Tabelle 4.1: innere Arbeit der einzelnen Fließlinien

Die äußere Arbeit wird für jedes Plattensegment nach Gleichung 11.4 berechnet und ist in Tabelle 4.2 aufgelistet. Für die gesamte äußere Arbeit der Platte erhält man:

$$-\delta A_a = \frac{1}{2} a^2 b \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \cdot p - \frac{1}{6} a^3 \left( \frac{1}{\delta\theta_1} + \frac{1}{\delta\theta_3} \right) \cdot \left( \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p \quad (4.4)$$

Der Traglastfaktor der Platte errechnet sich nach Gleichung 3.2 zu

$$\lambda_T = \frac{(m_{u,x}^+ - m_{u,x}^-) \cdot a \cdot (\delta\theta_1 + \delta\theta_3) + (m_{u,y}^+ - m_{u,y}^-) \cdot b \cdot (\delta\theta_2 + \delta\theta_4)}{\frac{1}{2} a^2 b \cdot \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \cdot p - \frac{1}{6} a^3 \left( \frac{1}{\delta\theta_1} + \frac{1}{\delta\theta_3} \right) \cdot \left( \frac{\delta\theta_2 \delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p} \quad (4.5)$$

Plattensegment	$\delta A_a =$
$E_1$	$\frac{1}{6}a^3 \frac{1}{\delta\theta_1} \left( \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p$
$E_2$	$\frac{1}{6}a^2 \left[ 3b - 2a \left( \frac{1}{\delta\theta_1} + \frac{1}{\delta\theta_3} \right) \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right] \cdot \frac{1}{\delta\theta_2} \cdot \left( \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p$
$E_3$	$\frac{1}{6}a^3 \frac{1}{\delta\theta_3} \left( \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p$
$E_4$	$\frac{1}{6}a^2 \left[ 3b - 2a \left( \frac{1}{\delta\theta_1} + \frac{1}{\delta\theta_3} \right) \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right] \cdot \frac{1}{\delta\theta_4} \cdot \left( \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p$
total	$\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \cdot p - \frac{1}{6}a^3 \left( \frac{1}{\delta\theta_1} + \frac{1}{\delta\theta_3} \right) \cdot \left( \frac{\delta\theta_2\delta\theta_4}{\delta\theta_2 + \delta\theta_4} \right)^2 \cdot p$

Tabelle 4.2: äußere Arbeit der einzelnen Plattensegmente

Gleichung 4.5 gibt den Traglastfaktor in Abhängigkeit von den Parametern  $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_4$  unter der Annahme an, dass eine Topologie gemäß Abbildung 4.2 vorliegt.

Da der Traglastfaktor in Gleichung 4.5 eine obere Schranke für die Traglast angibt, sind die Parameter  $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_4$  so zu bestimmen, dass der Traglastfaktor minimal wird. In diesem einfachen Einführungsbeispiel kann diese Ermittlung des Funktionsminimums analytisch erfolgen. Für komplexere Systeme sind Methoden der numerischen Optimierung anzuwenden. Während sich die analytische Untersuchung von Gleichung 4.5 auf diese eine Topologie beschränkt, wird bei der numerischen Optimierung automatisch auf Änderungen der Topologie reagiert, die durch Veränderung der Parameter entstehen.

Die Bestimmung des Minimums von Gleichung 4.5 liefert:

$$\begin{aligned} \delta\theta_1 = \delta\theta_3 &= \left[ \frac{a}{3b} + \sqrt{\left( \frac{a}{3b} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{m_{u,y}^+ - m_{u,y}^-}{m_{u,x}^+ - m_{u,x}^-}} \right] \cdot \delta\theta_4 \\ \delta\theta_2 &= \delta\theta_4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Man beachte, dass sich alle übrigen Parameter als Vielfaches von  $\delta\theta_4$  darstellen lassen. Das ergibt sich daher, dass die virtuelle Verschiebungsfigur keinen Absolutbetrag für die Verschiebung besitzt, sondern beliebig skalierbar ist. Formelmäßig äußert sich diese Eigenschaft darin, dass in der Gleichung für  $\lambda_T$  der überzählige Parameter nach dem Einsetzen verschwindet. Bei der numerischen Optimierung bereitet diese Überbestimmtheit keine Probleme. Der Optimierungsalgorithmus liefert als Ergebnis einen Absolutwert für die virtuellen Verschiebungen, der anschließend beliebig skaliert werden kann.

Der minimale Traglastfaktor wäre demnach

$$\lambda_T = \frac{8}{p} \left( \sqrt{\frac{m_{u,x}^+ - m_{u,x}^-}{3b^2}} + \sqrt{\frac{m_{u,x}^+ - m_{u,x}^-}{3b^2} + \frac{m_{u,y}^+ - m_{u,y}^-}{a^2}} \right) \quad (4.7)$$

Mit den Zahlenwerten aus der Aufgabenstellung erhält man  $\delta\theta_1 = \delta\theta_3 = 0.969\delta\theta_4$  und

$$\lambda_T = 1.504 \quad (4.8)$$

## 4.5 Fließlinienmuster 2

Bekanntlich entstehen in den Plattenecken kontinuierlich gelagerter Platten Drillmomente. Es ist zu erwarten, dass diese Drillmomente auch einen Einfluss auf die Versagensform der Platte und somit auf das Fließlinienmuster und die Traglast haben. Das Fließlinienmuster 1 wird daher so abgewandelt, dass zusätzliche Plattensegmente in den Plattenecken eingeführt werden (Abbildung 4.6). Die kurzen Fließlinien  $P_2 - P_3$ ,  $P_4 - P_5$ ,  $P_6 - P_7$  und  $P_8 - P_1$  werden durch die Eckdrillmomente verursacht.

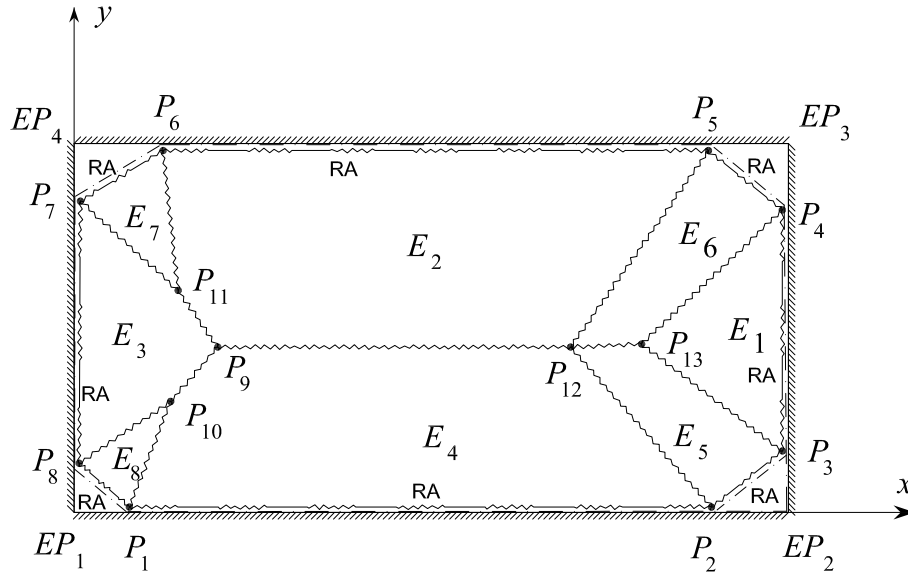


Abbildung 4.6: Fließlinienmuster 2

Je nach Verdrehung der neuen Plattensegmente können verschiedene Topologien des Fließlinienmusters auftreten. Die rechts dargestellte Topologie ( $E_5$  und  $E_6$ ) tritt bei kleineren Verdrehungen auf, die links dargestellte Topologie ( $E_7$  und  $E_8$ ) bei größeren Verdrehungen.



Auch im Fließlinienmuster 2 werden wieder die Lage der Rotationsachsen und die Verdrehungen der ebenen Plattensegmente als Optimierungsparameter verwendet. Die Rotationsachsen der Plattensegmente  $E_1$  bis  $E_4$  fallen wieder mit dem Plattenrand zusammen. Für die Ebene  $E_5$  wird die Rotationsachse durch die Punkte  $P_2$  und  $P_3$  festgelegt.

Da sich Punkt  $P_2$  auf dem Plattenrand  $EP_1 - EP_2$  befindet, bleibt nur die  $x$ -Koordinate von  $P_2$  als freier Parameter übrig. Vom Punkt  $P_3$  auf dem Plattenrand  $EP_2 - EP_3$  bleibt nur die  $y$ -Koordinate als freier Parameter. Man wird jedoch nicht die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der Punkte direkt benutzen, da dies bei nicht achsenparallelen Plattenrändern sehr umständlich wäre. Sinnvoller ist es, die Punkte in Streckenkoordinaten der Plattenränder anzugeben. In Vektorschreibweise wäre also

$$\begin{aligned} P_2 &= EP_1 + t_2(EP_2 - EP_1) \\ P_3 &= EP_2 + t_3(EP_3 - EP_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei  $0 < t_2 < 1$  und  $0 < t_3 < 1$  ist. Als freie Parameter gelten somit die Streckenkoordinaten  $t_2$  und  $t_3$  der Punkte  $P_2$  und  $P_3$ .

Analog zum Plattensegment  $E_5$  werden auch die Plattensegmente  $E_6$  bis  $E_8$  definiert.

Im Vergleich zu den vier freien Parametern beim Fließlinienmuster 1 ( $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_4$ ) besitzt das Fließlinienmuster 2 jetzt 16 freie Parameter: die Verdrehungen  $\delta\theta_1$  bis  $\delta\theta_8$  sowie die Streckenkoordinaten  $t_1$  bis  $t_8$  der Punkte  $P_1$  bis  $P_8$ . Die Optimierung zur Bestimmung des maßgebenden Fließlinienmusters mit dem minimalen Traglastfaktor wird man numerisch durchführen (vergleiche Abschnitt 20.2).

Die Optimierung liefert

$$\begin{aligned} \delta\theta_1 &= \delta\theta_3 = 0.916\delta\theta_4 \\ \delta\theta_2 &= \delta\theta_4 \\ \delta\theta_5 &= \delta\theta_6 = \delta\theta_7 = \delta\theta_8 = 0.829\delta\theta_4 \\ t_1 &= t_5 = 0.093 \\ t_2 &= t_6 = 0.907 \\ t_3 &= t_7 = 0.218 \\ t_4 &= t_8 = 0.782 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die Topologie der Plattensegmente in den Plattenecken entspricht den Segmenten  $E_5$  und  $E_6$  aus Abbildung 4.6. Der minimale Traglastfaktor mit diesen Parametern ist

$$\lambda_T = 1.409 \quad (4.11)$$

## 4.6 Fließlinienmuster 3

Vergleicht man Fließlinienmuster 1 (Abbildung 4.2) und Fließlinienmuster 2 (Abbildung 4.6) so stellt man fest, dass im zweiten Muster in jeder Plattenecke zwei *radiale*

*Fließlinien* auftreten, im Vergleich zu einer einzigen radialen Fließlinie je Plattenecke im Fließlinienmuster 1. Zum Beispiel sieht man in Abbildung 4.6 in Plattenecke  $EP_2$  die radialen Fließlinien  $P_2 - P_{12}$  und  $P_3 - P_{13}$ . In Abbildung 4.2 gibt es an dieser Stelle nur eine radiale Fließlinie  $P_2 - P_6$ . Gleichzeitig ist jedoch die *Relativverdrehung* (also der Winkel zwischen den beiden angrenzenden Plattensegmenten) in den radialen Fließlinien der Musters 2 kleiner als im Fließlinienmuster 1.

Diesen Trend kann man durch Einfügen weiterer ebener Plattensegmente mit zusätzlichen radialen Fließlinien in den Plattenecken weiter fortsetzen (vergleiche Abbildung 4.7). Mit jeder weiteren radialen Fließlinie reduziert sich die errechnete Tragfähigkeit der Platte dabei geringfügig.

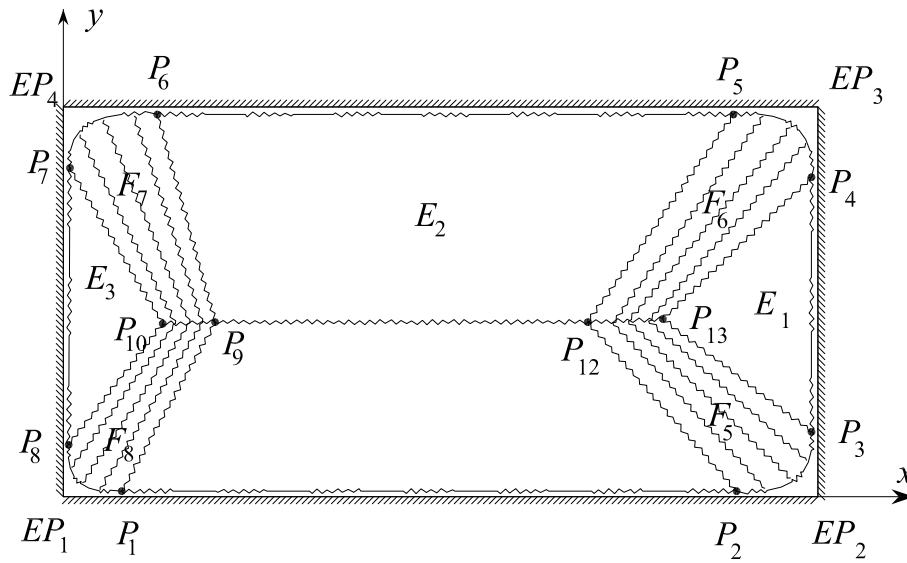


Abbildung 4.7: Fließlinienmuster 3

Im Grenzfall treten in jeder Plattenecke unendlich viele radiale Fließlinien auf. Diese Fließlinien liegen dann unendlich dicht beieinander, d.h. der Abstand zwischen zwei benachbarten Fließlinien geht gegen Null. Gleichzeitig geht aber auch die virtuelle Relativverdrehung in diesen Fließlinien in der virtuellen Verschiebungsfigur gegen Null.

Die Berechnung der inneren Arbeit liefert einen Term der Form  $0 \cdot \infty$  (Relativverdrehung  $\cdot$  Fließlinienlänge), wenn die Fließlinienanzahl gegen unendlich strebt. Dieser Term konvergiert jedoch gegen einen endlichen Wert.

Diese Fließlinien, die eine gegen Null strebende Relativverdrehung besitzen und einen gegen Null strebenden Abstand zu ihren benachbarten Fließlinien, werden im Rahmen dieser Arbeit als *verschmierte Fließlinien* bezeichnet. Die Gesamtheit aller zusammen gehörenden verschmierten Fließlinien wird *Fließlinienfächer* genannt. In der virtuellen Verschiebungsfigur stellen sich diese Fließlinienfächer als eine gekrümmte

Fläche dar. Jeder Rand eines Fließlinienfächers wird dabei von einer diskreten Fließlinie gebildet.

Das Fließlinienmuster in Abbildung 4.7 besitzt vier Fließlinienfächer ( $F_5$  bis  $F_8$ ). Unter Verwendung der Fließlinienfächer in den Plattenecken errechnet man eine Traglast (siehe Abschnitt 20.2) von

$$\lambda_T = 1.383 \tag{4.12}$$

Ohne Berücksichtigung der Eckdrillmomente wird die Traglast also um ca. 8.7% überschätzt. Der Ansatz mit zusätzlichen ebenen Plattensegmenten in den Plattenecken überschätzt die Traglast noch um 1.9% im Vergleich zum Ansatz mit Fließlinienfächern.



## 5 Berechnung der virtuellen Arbeiten

### 5.1 Virtuelle äußere Arbeit

Die virtuelle äußere Arbeit ergibt sich aus dem Skalarprodukt der äußeren Last mit der virtuellen Verschiebung des Lastangriffspunktes. Für ebene Plattentragwerke, die senkrecht zur Plattenebene belastet werden, stimmt die Verschiebungsrichtung mit der Kraftrichtung überein.

Für Flächenlasten  $p_A$ , Linienlasten  $p_L$  und Einzellasten  $P$  errechnet sich die äußere Arbeit nach Gleichung 5.1.

$$\delta A_a = \sum_{\text{Platten-segmente}} \int_A \delta w p_A dA + \sum_{\text{Platten-ränder}} \int_L \delta w p_L dL + \sum_{\text{Platten-eckpunkte}} \delta w P \quad (5.1)$$

Da nicht nur Annahmen über die Form der virtuellen Verschiebungsfigur (Muster der Fließlinien) getroffen werden müssen, sondern auch über die Richtung der Verschiebung, kann es vorkommen, dass die errechnete virtuelle äußere Arbeit negativ ist. In diesem Fall ist die angenommene Richtung der virtuellen Verschiebungsfigur entgegengesetzt zu der Verschiebung, die sich im Versagenszustand einstellen würde. In diesem Fall kann mit dem Absolutbetrag der äußeren Arbeit weiter gerechnet werden. Bei der Berechnung der inneren Arbeit sind alle virtuellen Verschiebungen und alle virtuellen Relativverdrehungen der angenommenen virtuellen Verschiebungsfigur mit dem Faktor -1 zu multiplizieren.

### 5.2 Virtuelle innere Arbeit

Für die Berechnung der inneren Arbeit muss man zwischen den zwei Arten von Fließlinien unterscheiden. Zum einen existieren diskrete Fließlinien, in denen sich zwei Plattensegmente in der virtuellen Verschiebungsfigur relativ zueinander verdrehen.

Die innere Arbeit dieser Fließlinien ergibt sich aus dem Produkt der virtuellen Relativverdrehung  $\delta\Delta\theta$  der angrenzenden Plattensegmente und dem plastischen Grenzmoment  $m_u$ . Dieses Produkt muss über die Länge der Fließlinie aufintegriert werden.

In den Fließlinienfächern verlaufen die Fließlinien unendlich dicht nebeneinander. In diesen Fließlinien geht der Betrag der virtuellen Relativverdrehung gegen Null. Die

innere Arbeit dieser Fließlinienfächer wurde bisher entweder über eine näherungsweise Beschreibung durch eine große Anzahl von Fließlinien bestimmt, oder aber für spezielle Fälle durch eine Grenzwertbetrachtung errechnet.

In Abschnitt 11.2.4 dieser Arbeit wurden Formeln entwickelt, mit denen die virtuelle innere Arbeit der Fließlinienfächer direkt berechnet werden können:

$$-\delta A_i = \sum_{\text{Fließ-  
linien}} \left( \int m_u^\pm(\varphi) \delta \Delta \theta ds \right) + \sum_{\text{Fächer}} \left( \int_A [m_{u,\xi}^\pm \delta \kappa_\xi + m_{u,\eta}^\pm \delta \kappa_\eta] dA \right) \quad (5.2)$$

Der obere Index  $m_u^+$  bzw.  $m_u^-$  gibt dabei das Vorzeichen des plastischen Moments an.

## 6 Fließbedingung

### 6.1 Allgemeine Fließlinientheorie

Nach der Fließlinientheorie verhält sich ein Querschnitt bis zum Erreichen des plastischen Momentes elastisch. Nach Überschreiten der zugehörigen elastischen Grenzkrümmung bleibt das Moment konstant, in den Fließlinien tritt dann eine Verdrehung auf. Die sich einstellende Fließlinie verläuft in Richtung des zugehörigen plastischen Momentenvektors. Das plastische Moment hängt ab von der Geometrie und der Steifigkeit des Querschnittes. Eine Interaktion mit dem Biegemoment senkrecht zur Fließlinie und dem Drillmoment wird nicht berücksichtigt.

Abbildung 6.1 zeigt die angenommene Fließbedingung für die Hauptmomentenrichtungen  $m_1$  und  $m_2$ .

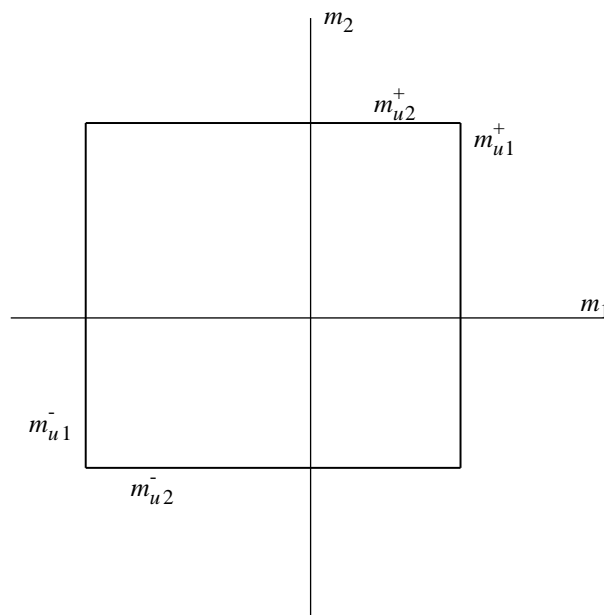


Abbildung 6.1: Fließbedingung für Fließlinien

Die Beträge der dargestellten Grenzbiegemomente  $m_{u1}^+$ ,  $m_{u1}^-$ ,  $m_{u2}^+$  sowie  $m_{u2}^-$  sind bei anisotropen Platten von der Richtung  $\varphi$  der Fließlinie abhängig.

Zur Verdeutlichung dieser Eigenschaft lässt sich das plastische Grenztragmoment in Abhängigkeit von  $\varphi$  in einem Kreisdiagramm veranschaulichen. Die Größe  $m_u(\varphi)$  des plastischen Moments wird über dem Winkel  $\varphi$  aufgetragen. In Abbildung 6.2

sind einige typische Beispiele solcher Diagramme dargestellt. Zum Vergleich ist das plastische Moment der Stahlbetonplatte aus Abbildung 6.2 b in Abbildung 6.3 in einem herkömmlichen linearen Koordinatensystem dargestellt.

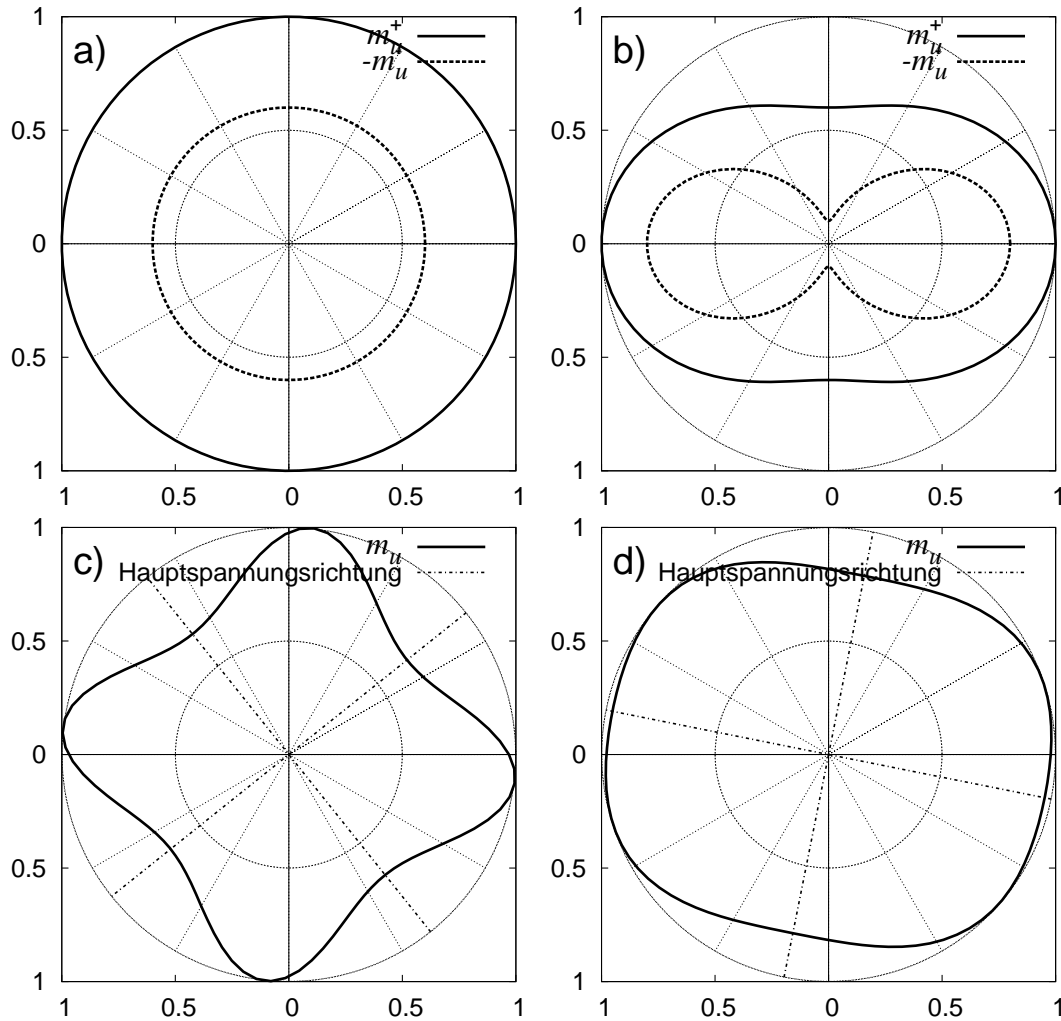


Abbildung 6.2: plastisches Moment in Abhängigkeit von der Richtung der Fließlinie  
a) isotrope Platte b) orthotrope Stahlbetonplatte c,d) Stahlplatte mit Membranbeanspruchung (eingezeichnet ist die Hauptspannungsrichtung der Membranbeanspruchung)

Da sich die Richtung der Fließlinie nach einer Drehung von jeweils  $180^\circ$  wiederholt, muss die Funktion  $m_u(\varphi)$  des plastischen Moments periodisch sein mit einer Periodenlänge von  $180^\circ$ .



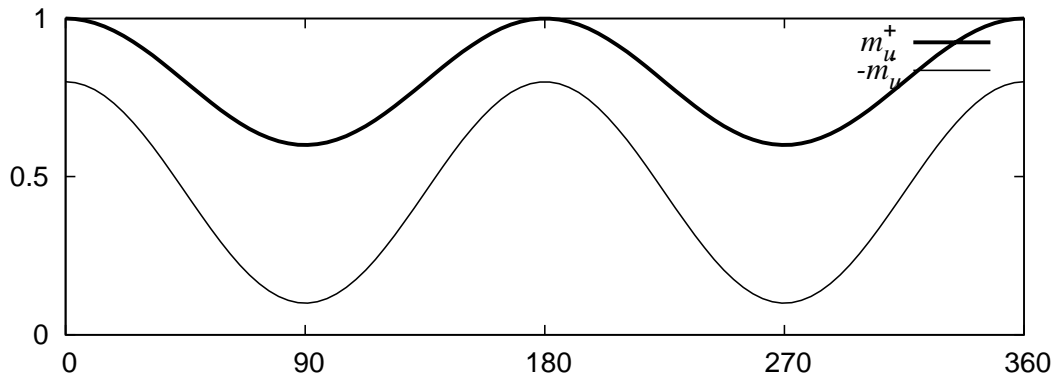


Abbildung 6.3: plastisches Moment in Abhängigkeit von der Richtung der Fließlinie, orthotrope Stahlbetonplatte aus Abbildung 6.2 b

## 6.2 Isotrope Platten

Für isotrope Platten ist das plastische Moment in allen Punkten und in allen Richtungen betragsmäßig gleich:  $m_u(\varphi) = \text{const.}$

In dem hier verwendeten Isotropiebegriff darf jedoch  $m_u^- \neq -m_u^+$  sein. Das Kreisdiagramm (Abbildung 6.2 a zeigt für die isotrope Platte zwei konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung.

Zur Erfüllung der Fließbedingung müssen die Fließlinien der isotropen Platte mit den Hauptmomentenrichtungen zusammenfallen. Anderenfalls treten Biegemomente auf, die größer als das positive plastische Moment bzw. kleiner als das negative plastische Moment sind. Daraus ergibt sich das bereits von Johansen in [32] formulierte *Orthogonalitätskriterium*.

Nach dem Orthogonalitätskriterium müssen eine positive und eine negative Fließlinie, die sich in einem Punkt treffen stets senkrecht zueinander verlaufen. Diese Bedingung wird jedoch in zahlreichen Lösungsansätzen des Schrifttums für spezielle Problemstellungen verletzt.

## 6.3 Orthotrope Stahlbetonplatten ohne Membranbeanspruchung

DIN 1045-1 und EC2 erlauben die Anwendung der Fließlinientheorie<sup>1</sup> für die Bemessung von Stahlbetonplatten, wenn ein ausreichendes Rotationsvermögen in den Bruchlinien vorhanden ist. Dies gilt insbesondere als gewährleistet, wenn hochduktiler Stahl verwendet wird. Nach EC2 darf die Höhe  $x$  der Druckzone im Versagenszustand den Wert von  $1/4$  der Nutzhöhe ( $0.25d$ ) nicht überschreiten. In DIN 1045-1 hängt

<sup>1</sup>im Massivbau häufig als Bruchlinientheorie bezeichnet

dieser Wert von der Festigkeitsklasse des Betons und dem Verhältnis von Stützen- zu Feldmoment ab. Jedoch zeigen die Untersuchungen von Pardey in [45], dass auch für normalduktilen Stahl die Ergebnisse von Berechnungen nach Bruchlinientheorie mit den Ergebnissen aus Versuchen und physikalisch nichtlinearen FE-Berechnungen für Stahlbetonplatten sehr gut übereinstimmen.

Stahlbeton weist unter Biegebeanspruchung nur dann ein plastisches Verhalten auf, wenn ein Versagen des Stahls in der Zugzone eintritt. Bei stark bewehrten Querschnitten erfolgt das Versagen durch einen plötzlichen Bruch der Betondruckzone. Wegen der fehlenden Rotationskapazität ist die Fließlinientheorie zur Traglastbestimmung somit nicht anwendbar.

Die Stahlzugkraft errechnet sich im Versagenszustand zu  $f_s = a_s \cdot \sigma_f$ . Da die inneren Kräfte im Gleichgewicht stehen, ist die Betondruckkraft (bei reiner Biegebeanspruchung) ebenso groß. Damit erhält man das plastische Moment zu

$$m_u = \sigma_f a_s z \quad (6.1)$$

Dabei ist  $z \approx 0.9d$  der Hebelarm der inneren Kräfte im Versagenszustand.

Stahlbetonplatten weisen häufig eine unterschiedliche Bewehrung in  $x$ - und  $y$ -Richtung auf, so dass sich unterschiedliche plastische Momente  $m_{u,x}$  und  $m_{u,y}$  ergeben. Eine unterschiedliche obere und untere Bewehrung führt zu verschiedenen positiven und negativen plastischen Momenten  $m_u^+$  und  $m_u^-$ .

Das plastische Moment einer Fließlinie, die unter dem Winkel  $\varphi$  gegenüber der  $x$ -Richtung verläuft ergibt sich aus dem Treppenstufenansatz („stepped yield criterion“) nach Johansen [32, 40].

$$m_u = m_{u,x} \sin^2 \varphi + m_{u,y} \cos^2 \varphi \quad (6.2)$$

Dabei wird angenommen, dass die gesamte Bewehrung in der Fließlinie zu fließen beginnt und die einzelnen Bewehrungsstähe gerade bleiben.

In Abbildung 6.2 b ist das plastische Moment einer überwiegend in  $x$ -Richtung bewehrten Stahlbetonplatte abgebildet. Die obere Bewehrung ist zudem geringer als die untere Bewehrung.

## 6.4 Stahlplatten mit Membranbeanspruchung

Zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens von Stahl wird üblicherweise die von-Mises-Fließbedingung verwendet:

$$\sigma_v^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_f^2 \quad (6.3)$$

In der Fließlinientheorie wird jedoch das plastische Moment konstant entlang der Fließlinie angenommen. Da die Plattendicke und die Fließspannung für alle Richtungen gleich sind, ist auch das plastische Moment richtungs- und vorzeichenunabhängig.

$$m_u = \pm \frac{\sigma_f d^2}{4} \quad (6.4)$$

Der Einfluss der unbekannten Quermomente wird vernachlässigt. Für den Fall, dass das plastische Moment  $m_u$  und das Quermoment  $m_s$  dasselbe Vorzeichen besitzen, liegt diese Vereinfachung geringfügig auf der sicheren Seite. Für Bereiche, in denen beide Momente unterschiedliche Vorzeichen besitzen, wird die Querschnittstragfähigkeit jedoch stark überschätzt.

Im Stahlbau wird die Fließlinientheorie häufig zum plastischen Nachweis lokaler Lastenleitungspunkte einzelner Bauteile (beispielsweise Stege oder Flansche von I-Profilen) angewandt. Neben der lokalen Biegebeanspruchung sind diese Bauteile in der Regel auch noch Membranbeanspruchungen infolge globaler Tragwirkungen unterworfen.

Die Membrankräfte  $n_x$ ,  $n_y$  und  $n_{xy}$  sollen durch eine Abminderung des plastischen Grenzmoments berücksichtigt werden. Dabei werden die unbekannten Größen des Biegemomentes quer zur Fließlinie sowie des Wölbmomentes vernachlässigt. Dem Vorschlag von Murray folgend (siehe [24, 25]) werden sowohl die Normalspannungen  $\sigma_s$  parallel zur Fließlinie als auch die Schubspannungen  $\sigma_{sn}$  in der Fließlinie als konstant über die Plattendicke verteilt angenommen. Weiterhin bleibt auch eine Umlagerung der Membrankräfte aus den plastischen in die elastischen Plattenbereiche unberücksichtigt.

Aus der von-Mises-Fließbedingung in der Fließlinie

$$\sigma_n^2 + \sigma_s^2 - \sigma_n \sigma_s + 3\sigma_{sn}^2 = \sigma_f^2 \quad (6.5)$$

folgen die Spannungen in der Druck- und in der Zugzone:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,d} &= \frac{\sigma_s}{2} - \sqrt{\sigma_f^2 - 3\sigma_{sn}^2 - \frac{3}{4}\sigma_s^2} \\ \sigma_{n,z} &= \frac{\sigma_s}{2} + \sqrt{\sigma_f^2 - 3\sigma_{sn}^2 - \frac{3}{4}\sigma_s^2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Für die Schnittgrößen entlang der Fließlinie gilt

$$\begin{aligned} n_n &= \sigma_{n,d} \cdot \left( \frac{d}{2} - z_0 \right) + \sigma_{n,z} \cdot \left( \frac{d}{2} + z_0 \right) \\ m_n &= (\sigma_{n,z} - \sigma_{n,d}) \cdot \frac{d^2 - 4z_0^2}{8} \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei  $z_0$  der Abstand der plastischen Nulllinie von der geometrischen Mittellinie ist.

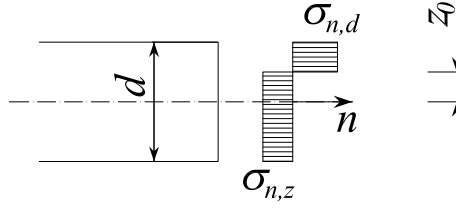


Abbildung 6.4: Spannungsverlauf in der Stahlplatte

Da  $\sigma_s$  und  $\sigma_{sn}$  gleichmäßig über die Plattendicke verteilt angenommen werden gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{n_s}{d} \\ \sigma_{sn} &= \frac{n_{sn}}{d}\end{aligned}\tag{6.8}$$

und somit:

$$z_0 = \frac{d}{4} \cdot \frac{2n_n - n_s}{\sqrt{(\sigma_f \cdot d)^2 - 3n_{sn}^2 - \frac{3}{4}n_s^2}}\tag{6.9}$$

Damit ergibt sich die  $m_u$ - $n$ -Interaktion für das plastische Moment der Fließlinie

$$m_u = m_n = \frac{d}{4} \cdot \frac{(\sigma_f \cdot d)^2 - (n_s^2 + n_n^2 - n_s n_n + 3n_{sn}^2)}{\sqrt{(\sigma_f \cdot d)^2 - 3n_{sn}^2 - \frac{3}{4}n_s^2}}\tag{6.10}$$

Der Term  $(n_s^2 + n_n^2 - n_s n_n + 3n_{sn}^2)$  über dem Bruchstrich gibt das Quadrat der Vergleichs-Normalkraft an. Diese ist konstant und unabhängig von der Richtung, so dass man diesen Term auch auf das globale  $x,y$ -Koordinatensystem bezogen schreiben kann:

$$m_u = m_n = \frac{d}{4} \cdot \frac{(\sigma_f \cdot d)^2 - (n_x^2 + n_y^2 - n_x n_y + 3n_{xy}^2)}{\sqrt{(\sigma_f \cdot d)^2 - 3n_{sn}^2 - \frac{3}{4}n_s^2}}\tag{6.11}$$

Die Schnittgrößen in der Fließlinie erhält man aus

$$\begin{aligned}n_s &= n_x \cos^2 \varphi + n_y \sin^2 \varphi + 2n_{xy} \cos \varphi \sin \varphi \\ n_n &= n_x \sin^2 \varphi + n_y \cos^2 \varphi - 2n_{xy} \cos \varphi \sin \varphi \\ n_{sn} &= (n_y - n_x) \cos \varphi \sin \varphi + n_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\end{aligned}\tag{6.12}$$

Das negative plastische Moment ergibt sich analog und ist vom Betrag her genau so groß wie das positive plastische Moment.

Das in Abbildung 6.2 c dargestellte plastische Moment ergibt sich für eine Stahlplatte mit überwiegender Schubbeanspruchung. Die zu Abbildung 6.2 d gehörige Stahlplatte wird überwiegend druckbeansprucht. Auch in diesen Fällen zeigt sich ein stark anisotropes Verhalten.

## 6.5 Plastische Momente für beliebige Werkstoffe

Wie bereits in Abschnitt 6.1 beschrieben wurde, muss die Funktion  $m_u(\varphi)$  des plastischen Momentes in Abhängigkeit von der Richtung  $\varphi$  der Fließlinie für jeden Werkstoff stets periodisch sein mit einer Periodenlänge von  $180^\circ$ .  $m_u(\varphi)$  für beliebige Werkstoffe kann daher mittels einer Fourier-Reihe beschrieben werden:

$$m_u(\varphi) = c + \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} \cos(2i\varphi) + \sum_{i=1}^{\infty} b_{2i} \sin(2i\varphi) \quad (6.13)$$

Ungerade Fourier-Koeffizienten werden dabei stets zu Null, da  $m_u(\varphi) = m_u(\varphi + \pi)$  gelten muss.

## 6.6 Hinweise zur numerischen Bestimmung der plastischen Schnittgrößen

Zur Auswertung der Gleichungen 6.2 und 6.12 muss vorab der Winkel  $\varphi$  der Richtung der Fließlinie bestimmt werden. Dies geschieht für einzelne Fließlinien durch den Richtungsvektor der Fließlinie  $r = (\dot{x}, \dot{y})^T$ . Dabei ist  $\dot{x}$  bzw.  $\dot{y}$  die Ableitung der  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate der Fließlinie nach der lokalen Koordinate  $s$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{ds} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für den Winkel  $\varphi$  der Fließlinie im Punkt  $x, y$  gilt  $\varphi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ . Für Fächersegmente mit inneren Fließlinien erhält man den Winkel nach Gleichung 11.32 ebenfalls durch Auswertung einer arctan-Funktion.

Mit dem so bestimmten Winkel  $\varphi$  die Werte für  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  zu bestimmen, ist sehr ineffizient. Sowohl die arctan-Funktion als auch die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  werden vom Computer prozessorintern durch eine Reihenentwicklung berechnet. Dies verbraucht vergleichsweise viel Rechenzeit.

Effizienter ist eine direkte Berechnung der Winkelfunktionen  $\sin$  und  $\cos$  aus den Komponenten des Richtungsvektors. Für Fließlinien mit dem Richtungsvektor  $r = (\dot{x}, \dot{y})^T$  gilt:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \cos \varphi \sin \varphi &= \frac{\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (6.15)$$



# 7 Transformation

## 7.1 Notwendigkeit einer Transformation

Das im Rahmen dieser Arbeit hergeleitete Element für die Fächersegmente ist für die Berechnung von isotropen Platten optimiert. Die für anisotrope Platten ermittelte Traglast wird um so weiter von der realen Traglast abweichen, um so stärker die Eigenschaften der Platte von der Isotropie abweichen. Das gefundene Fließlinienmuster ist suboptimal.

Jones und Wood beweisen in [40], dass eine Fließlinienberechnung durch eine affine Transformation übertragbar ist. Das bedeutet, dass der Fließlinienberechnung nicht unbedingt das globale  $x, y$ -Koordinatensystem der zu untersuchenden Platte zu Grunde liegen muss, sondern die Fließlinien können auch an einer äquivalenten Ersatzplatte bestimmt werden, deren Eckpunktkoordinaten durch eine affine Transformation aus den Eckpunktkoordinaten der Ursprungsplatte hervorgehen. Dabei wird zu der gegebenen Platte eine Ersatzplatte gewählt, die günstigere Materialeigenschaften aufweist. Im Idealfall lässt sich eine anisotrope Platte auf diesem Wege als isotrop berechnen.

Isotrope Platten besitzen in allen Richtungen das gleiche plastische Grenzmoment. Bei anisotropen Platten weicht das plastische Moment in den verschiedenen Richtungen mehr oder weniger stark vom Mittelwert ab.

Als Beispiel, das den Sinn einer Transformation veranschaulicht, wird eine allseitig eingespannte Quadratplatte gewählt, die jedoch in beide Koordinatenrichtungen unterschiedlich stark bewehrt ist:

$$m_{u,x}^{\pm} = \frac{1}{2} m_{u,y}^{\pm} \quad (7.1)$$

Die Platte wird mit einer Einzellast  $P$  belastet.

Diese Platte wird einer Transformation mit  $a_{yy} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  und  $a_{yx} = 0$  unterworfen. (Die Bedeutung dieser Werte wird in Abschnitt 7.3 erläutert.) In Abbildung 7.2 ist die Ersatzplatte mit den transformierten Koordinaten dargestellt.

Das plastische Moment der Platte ist gemäß Gleichung 7.26 in allen Richtungen gleich:

$$m_u^{\pm'} = \sqrt{2} m_{u,x}^{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2} m_{u,y}^{\pm} \quad (7.2)$$

Die Versagenform für diese Platte ist bekanntermaßen ein kreisförmiger Fließlinienfächer (Abbildung 7.3).

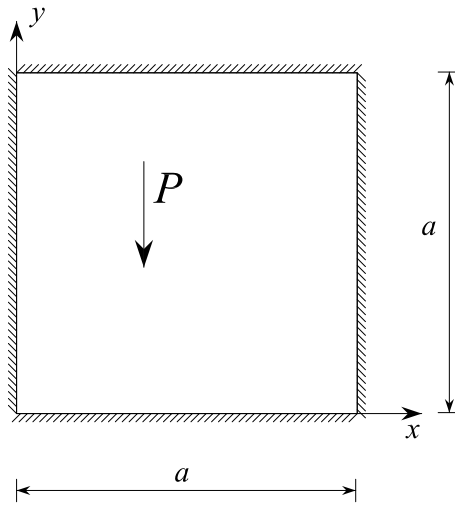


Abbildung 7.1: Quadratplatte mit Einzellast

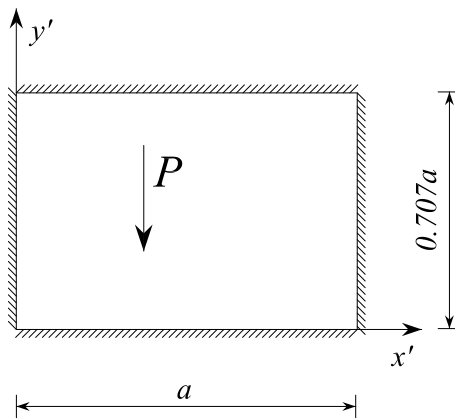


Abbildung 7.2: Ersatzplatte mit transformierten Koordinaten

Der Traglastfaktor ist unabhängig vom Durchmesser des Fächers

$$\lambda_T = 2\pi(m_u^{+'} - m_u^{-'}) \frac{1}{P} \quad (7.3)$$

In den Koordinaten der Ausgangsplatte ist das Fließlinienmuster also wie in Abbildung 7.4 dargestellt ein elliptischer Fließlinienfächer. Die längere Hauptachse der Ellipse verläuft in  $y$ -Richtung und ist  $\sqrt{2}$ -mal so lang wie die kurze Hauptachse.

Im Beispiel 2 im Abschnitt 20.2 wird der Einfluss der Transformation anhand des Einführungsbeispiels aus Kapitel 4 quantitativ untersucht.



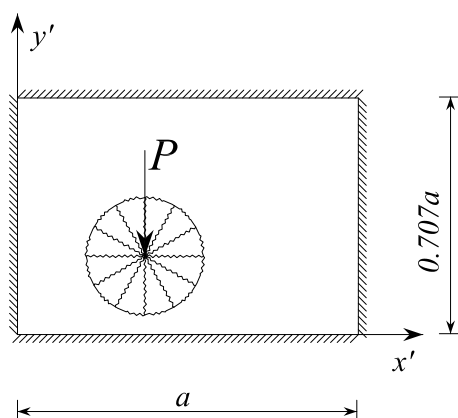


Abbildung 7.3: Fließlinienmuster in transformierten Koordinaten - Kreisfächer

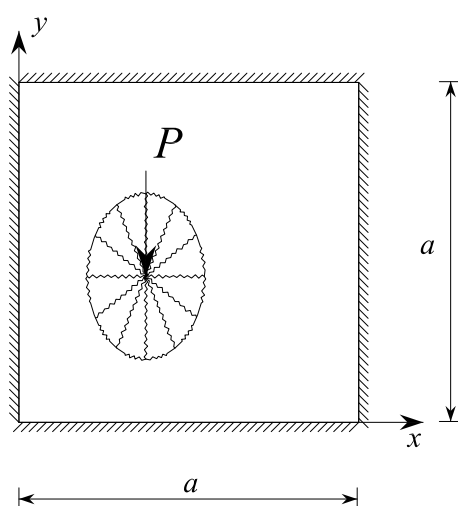


Abbildung 7.4: Lösung der Ausgangsplatte - elliptischer Fächer

## 7.2 Isotropie-Parameter

Um die Abweichung einer Platte zur Isotropie quantifizieren zu können, wird im Rahmen dieser Arbeit der Isotropie-Parameter  $IP$  definiert. Die Abweichung des plastischen Moments vom Mittelwert wird über alle Richtungen der Fließlinien aufintegriert und normiert.

$$\begin{aligned}
IP &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{m_u^+(\varphi)}{m_{um}^+} - 1 \right)^2 d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{m_u^-(\varphi)}{m_{um}^-} - 1 \right)^2 d\varphi \\
&= \frac{1}{m_{um}^+{}^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi m_u^+(\varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{m_{um}^-{}^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi m_u^-(\varphi)^2 d\varphi - 2
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\text{mit dem Mittelwert} \quad m_{um}^\pm = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi m_u^\pm(\varphi) d\varphi \tag{7.5}$$

Für isotrope Platten ist dieser Parameter Null, je stärker die Abweichung von der Isotropie, um so größer ist der Wert. Für die Platten in Abbildung 6.2 erhält man  $IP_a) = 0$ ,  $IP_b) = 0.334$ ,  $IP_c) = 0.040$  und  $IP_d) = 0.011$ .

Um diesen Wert zu verbessern, kann statt der ursprünglichen Platte eine äquivalente Platte berechnet werden, deren Geometrie durch eine affine Transformation aus der Ausgangsplatte hervorgeht.

### 7.3 Herleitung der Transformationsregeln

Allgemein hat eine affine Transformation die folgende Form:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Dabei sind  $x'$  und  $y'$  die affin transformierten Koordinaten der Ersatzplatte.

Die Transformationsgleichung 7.6 enthält sechs freie Transformationsparameter. Für die Fließlinientheorie sind jedoch nur solche Parameter der Transformation interessant, die die Platteneigenschaften qualitativ beeinflussen. Eine Verschiebung der Platte im Koordinatensystem ändert beispielsweise nichts am Ergebnis einer Fließlinienberechnung, und ist somit unnötig. Man kann folglich  $b_x = b_y = 0$  setzen. Ebenso ist das Ergebnis der Fließlinienberechnung qualitativ invariant gegenüber einer Drehung der Platte um einen beliebigen Winkel  $\alpha$ . Die Transformationsmatrix hierfür ist:

$$\mathbf{a}_{\text{Drehung}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Weiterhin ist auch durch eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung der gesamten Platte um einen konstanten Faktor  $c$  kein qualitativ anderes Ergebnis zu erwarten. Die zugehörige Transformationsmatrix lautet:

$$\mathbf{a}_{\text{Vergrößerung}} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Jones und Wood geben in [40] Gleichungen für Transformationen an, die eine Dehnung oder Stauchung in Richtung der  $y$ -Richtung ergeben. Die Transformationsmatrix mit  $a_{yy} > 0$  lautet hierfür:

$$\mathbf{a}_{\text{Dehnung}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Eine weitere Transformation erzeugt eine Verzerrung parallel zu einer der Koordinatenachsen. Die Transformationsmatrix für Verzerrungen parallel zur  $y$ -Achse lautet:

$$\mathbf{a}_{\text{Verzerrung}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{yx} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Führt man diese beiden Transformationen nacheinander aus, so erhält man die Transformationsmatrix  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{yx} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

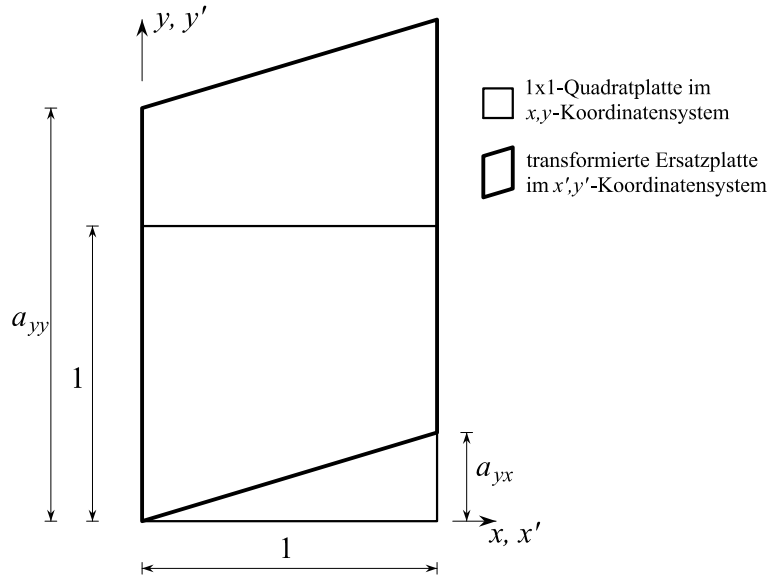


Abbildung 7.5: Quadratplatte mit äquivalenter, transformierter Ersatzplatte

Im Folgenden wird gezeigt, dass diese beiden Transformationsparameter ausreichend sind, um alle möglichen, relevanten Ersatzplatten zu erzeugen.

Dazu geht man von einer Ersatzplatte mit einer beliebigen Transformationsmatrix  $\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{xx} & \tilde{a}_{xy} \\ \tilde{a}_{yx} & \tilde{a}_{yy} \end{bmatrix}$  aus.

Diese wird einer Drehung um einen Winkel  $\alpha$  mit  $\sin(\alpha) = -\frac{\tilde{a}_{xy}}{\sqrt{\tilde{a}_{xy}^2 + \tilde{a}_{yy}^2}}$  und  $\cos(\alpha) = \frac{\tilde{a}_{yy}}{\sqrt{\tilde{a}_{xy}^2 + \tilde{a}_{yy}^2}}$  unterworfen.

Die dadurch entstehende Transformationsmatrix hat die Form  $\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{xx} & 0 \\ \tilde{a}_{yx} & \tilde{a}_{yy} \end{bmatrix}$ . Eine anschließende Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Platte in den transformierten Koordinaten mit dem Faktor  $c = \frac{1}{\tilde{a}_{xx}}$  führt zu der in Gleichung 7.11 beschriebenen Form  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}$ . Da keiner der Zwischenschritte einen qualitativen Einfluss auf das Ergebnis der Fließlinienberechnung hat, sind auch die Matrizen  $\mathbf{a}$  und  $\tilde{\mathbf{a}}$  gleichwertig hinsichtlich einer Fließlinienuntersuchung. Für die Wahl der Transformation bleiben daher statt der anfänglichen sechs nur noch zwei freie Parameter, die das Ergebnis der Fließlinienberechnung auch qualitativ beeinflussen.

Mit diesem Ansatz für die Transformationsmatrix bleibt die  $x$ -Koordinate eines jeden Punktes erhalten. Weiterhin muss  $a_{yy} > 0$  sein, da anderenfalls die Platte gespiegelt wird. Abbildung 7.5 zeigt eine Quadratplatte mit der Kantenlänge 1 im  $x, y$ -Koordinatensystem und die durch die Transformation  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}$  entstandene Ersatzplatte im  $x', y'$ -Koordinatensystem.

Abweichend zu den von Jones und Wood entworfenen Transformationsregeln sollte jedoch ein konsistenter Ansatz für die virtuellen Arbeiten verwendet werden. Dazu wird vorausgesetzt, dass die virtuelle Verschiebung jedes Punktes der Ausgangsplatte und der transformierten Ersatzplatte gleich ist. Weiterhin wird gefordert, dass die errechnete innere und äußere Arbeit sämtlicher Objekte der Platte in beiden Koordinatensystemen identisch sein soll. Diese Forderung ist bei Jones und Wood nicht erfüllt.

Um die Bedingung der Konsistenz der virtuellen Arbeiten zu erfüllen, müssen die Werte der Lasten und der plastischen Grenzmomente der transformierten Ersatzplatte angepasst werden. Hierzu sind folgende Beziehungen zu verwenden:

- Winkel:

$$\tan \varphi' = a_{yx} + a_{yy} \tan \varphi \quad (7.12)$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\sin \varphi' - a_{yx} \cos \varphi'}{a_{yy} \cos \varphi'} \right) \quad (7.13)$$

$$\frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi'}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\tan \varphi' - a_{yx}}{a_{yy}}\right)^2}{1 + \tan^2 \varphi'}} \quad (7.14)$$

hierbei ist

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} = \frac{1}{a_{yy}} \quad (7.15)$$

$\cos \varphi$  und  $\cos \varphi'$  besitzen immer dasselbe Vorzeichen.

Nach Abschnitt 6.6 werden zur Berechnung der plastischen Momente speziell auch folgende Beziehungen benötigt:

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi &= \frac{a_{yy}^2 \cos^2 \varphi'}{(a_{yx}^2 + a_{yy}^2 - 1) \cos^2 \varphi' - 2a_{yx} \cos \varphi' \sin \varphi' + 1} \\ \cos \varphi \sin \varphi &= \frac{a_{yy} (\cos \varphi' \sin \varphi' - a_{yx} \cos^2 \varphi')}{(a_{yx}^2 + a_{yy}^2 - 1) \cos^2 \varphi' - 2a_{yx} \cos \varphi' \sin \varphi' + 1}\end{aligned}\quad (7.16)$$

Der Nenner in diesen Gleichungen ist stets positiv, da gilt:

$$(a_{yx}^2 + a_{yy}^2 - 1) \cos^2 \varphi' - 2a_{yx} \cos \varphi' \sin \varphi' + 1 = (a_{yy} \cos \varphi')^2 + (\sin \varphi' - a_{yx} \cos \varphi')^2 \quad (7.17)$$

- Längen:

$$L' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} L \quad (7.18)$$

(wegen der auf die  $x$ -Richtung projizierten Länge  $L \cos(\varphi) = L' \cos(\varphi')$ )

- Flächen:

$$A' = a_{yy} A \quad (7.19)$$

- virtuelle Verschiebung:

$$\delta w(x, y) = \delta w(x', y') \quad (7.20)$$

- Ableitung der virtuellen Verschiebung (mit  $(\cdot)_{,x}$  = partielle Ableitung nach  $x$  und  $(\cdot)_{,y}$  = partielle Ableitung nach  $y$ ):

$$\begin{aligned}\delta w_{,x} &= \delta w_{,x'} x'_{,x} + \delta w_{,y'} y'_{,x} = 1 \cdot \delta w_{,x'} + a_{yx} \delta w_{,y'} \\ \delta w_{,y} &= \delta w_{,x'} x'_{,y} + \delta w_{,y'} y'_{,y} = 0 \cdot \delta w_{,x'} + a_{yy} \delta w_{,y'}\end{aligned}\quad (7.21)$$

und somit

$$\begin{aligned}\delta w_{,x'} &= \delta w_{,x} - a_{yx} \frac{\delta w_{,y}}{a_{yy}} \\ \delta w_{,y'} &= \frac{\delta w_{,y}}{a_{yy}}\end{aligned}\quad (7.22)$$

- virtuelle Relativverdrehung in einer Fließlinie (aus Gleichung 10.4):

$$\delta\Delta\theta' = r'_x(\delta w_{r,y'} - \delta w_{l,y'}) + r'_y(\delta w_{l,x'} - \delta w_{r,x'}) \quad (7.23)$$

da  $r'$  normiert ist:

$$\begin{aligned} r'_x &= \frac{\cos(\varphi')}{\cos(\varphi)} r_x \\ r'_y &= \frac{\cos(\varphi')}{\cos(\varphi)} (a_{yy} r_y + a_{yx} r_x) \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\delta\Delta\theta' = \frac{1}{a_{yy}} \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi')} \cdot \delta\Delta\theta \quad (7.25)$$

- plastisches Moment in einer Fließlinie (aus  $m'_u \delta\Delta\theta' L' = m_u \delta\Delta\theta L$ ):

$$m'_u(\varphi') = a_{yy} \left[ \frac{\cos(\varphi')}{\cos(\varphi)} \right]^2 m_u(\varphi) \quad (7.26)$$

- Einzellasten:

Da die virtuelle Verschiebung in jedem Punkt gleich ist, bleiben Einzellasten unverändert. Linienlasten werden entsprechend der Linienlänge und Flächenlasten entsprechend der Flächengröße angepasst.

$$P' = P \quad (7.27)$$

- Linienlasten (aus  $p'_L L' = p_L L$ ):

$$p'_L = \frac{\cos(\varphi')}{\cos(\varphi)} p_L \quad (7.28)$$

- Flächenlasten (aus  $p'_A A' = p_A A$ ):

$$p'_A = \frac{1}{a_{yy}} p_A \quad (7.29)$$

Die hier abgeleiteten Formeln haben gegenüber den Formeln von Jones und Wood den Vorteil, dass alle relevanten Transformationen gleichzeitig berücksichtigt sind, und nicht nacheinander angewandt werden müssen. Weiterhin sind diese Gleichungen für beliebige plastische Momente  $m_u(\varphi)$  gültig. Die Formeln von Jones und Wood waren nur speziell für die Entzerrung von Platten mit schiefer Bewehrung konstruiert.

In Abbildung 7.6 ist das plastische Moment einer Stahlbetonplatte dargestellt, die sich durch die Transformation in eine isotrope Platte überführen lässt. Bei der

Ausgangsplatte ist das Verhältnis  $m_{u,x}/m_{u,y}$  für das positive und das negative plastische Grenzmoment konstant.

Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 7.7 das plastische Moment einer Stahlbetonplatte, bei der das Verhältnis  $m_{u,x}/m_{u,y}$  für das positive und das negative plastische Grenzmoment veränderlich ist. Um ein  $m_u$  zu erzeugen, das in alle Richtungen gleich ist (d.h. isotrop) sind für das positive und das negative plastische Moment unterschiedliche Transformationsmatrizen erforderlich. Daher ist die Platte nach der Transformation, die das minimale  $IP$  erzeugt, noch immer anisotrop.

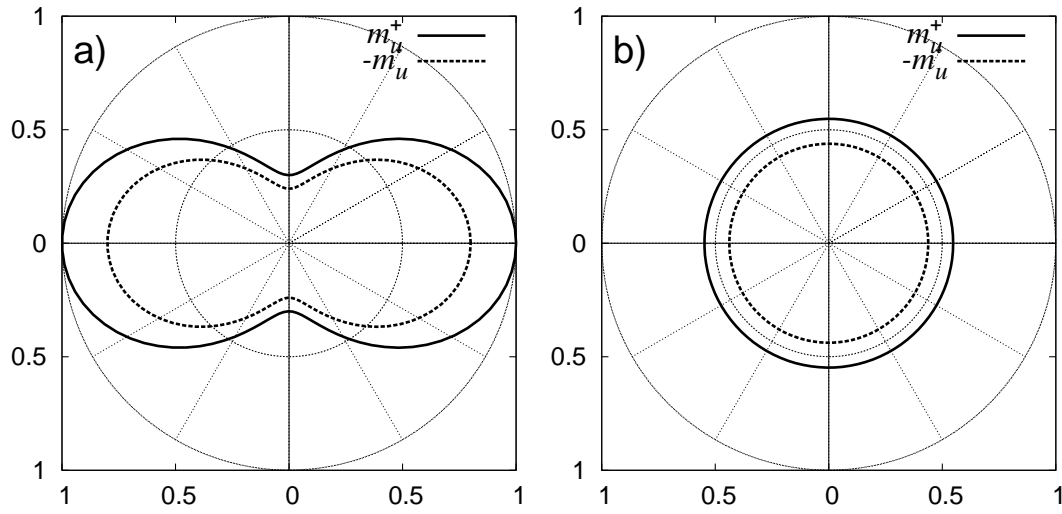


Abbildung 7.6: plastisches Moment einer anisotropen Stahlbetonplatte a) Platte ohne Transformation b) isotrope Platte nach Transformation

Die Transformation nach dem obigen Ansatz ist konsistent bezüglich der virtuellen Arbeiten. Für jedes Objekt (Fließlinie mit virtueller innerer Arbeit oder Belastung mit virtueller äußerer Arbeit) ist der berechnete Arbeitsanteil der Ausgangsplatte und der transformierten Ersatzplatte gleich. Damit müssen nur diejenigen Arbeitsanteile am transformierten Ersatzsystem berechnet werden, für die diese Transformation relevant wird. So können die äußere Arbeit komplett sowie die innere Arbeit für die diskreten Fließlinien am Ausgangssystem berechnet werden. Die Transformation muss lediglich für die Fließlinien im Inneren von Fächersegmenten berücksichtigt werden, da sich hier der Verlauf der Fließlinien ändert (siehe Abschnitt 11.2.5). Eine Transformation aller Koordinaten ist nicht erforderlich.

### Praktisches Vorgehen - Variante 1

Zu Beginn der Rechnung können die Parameter  $a_{yx}$  und  $a_{yy}$  bestimmt werden, so dass der Isotropie-Parameter  $IP$  minimal wird.

Dazu berechnet man den Isotropie-Parameter  $IP$  der transformierten Ersatzplatte  $x', y'$  in Abhängigkeit von den Transformationsparametern  $a_{yx}$  und  $a_{yy}$ . Man optimiert  $a_{yx}$  und  $a_{yy}$ , so dass  $IP(a_{yx}, a_{yy})$  ein Minimum annimmt.

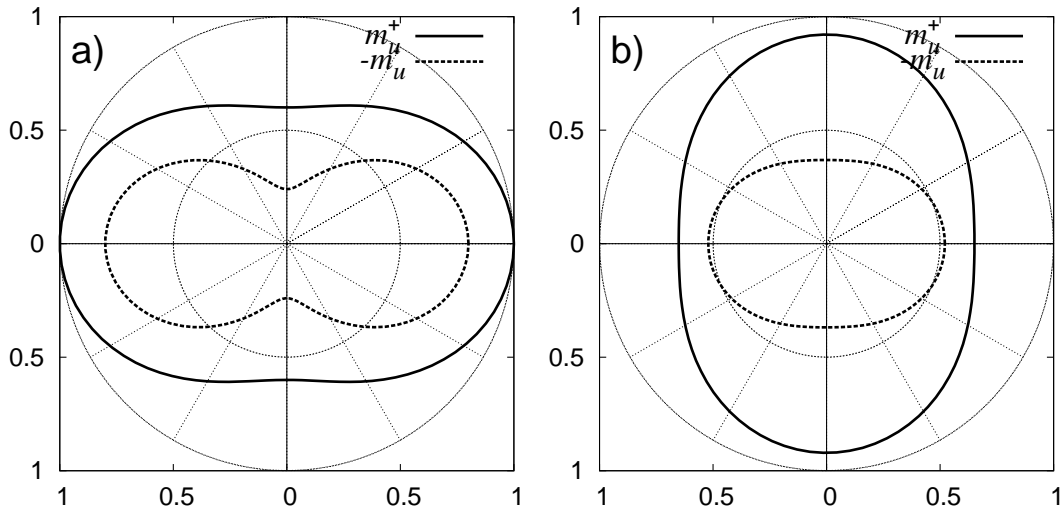


Abbildung 7.7: plastisches Moment einer anisotropen Stahlbetonplatte a) Platte ohne Transformation b) anisotrope Platte mit Transformation ( $IP$  minimiert)

Für orthotrope Stahlbetonplatten mit gegebenen Werten  $m_{u,x}^\pm$  und  $m_{u,y}^\pm$  lassen sich die optimalen Transformationsparameter analytisch bestimmen:

$$a_{yx} = 0$$

$$a_{yy} = \sqrt{\sqrt{\frac{m_{u,x}^+}{m_{u,y}^+}} \cdot \sqrt{\frac{m_{u,x}^-}{m_{u,y}^-}}} \quad (7.30)$$

Für andere Fälle ist in der Regel eine numerische Optimierung erforderlich.

### Praktisches Vorgehen - Variante 2

Die Parameter  $a_{yx}$  und  $a_{yy}$  werden im Rahmen der Plattenberechnung optimiert.

Beim Vorgehen nach Variante 1 werden nacheinander zwei Optimierungen durchgeführt. Zuerst die Ermittlung der optimalen Transformationsparameter, anschließend die numerische Optimierung zur Bestimmung der Traglast. Beide Optimierungsläufe können zusammengefasst werden, indem die Transformationsparameter  $a_{xy}$  und  $a_{yy}$  als zusätzliche Optimierungsparameter in die numerische Optimierung zur Traglastberechnung aufgenommen werden.

### Vergleich der beiden Vorgehensweisen

In der Gleichung für  $IP$  (Gleichung 7.4) gehen das positive und das negative plastische Moment mit demselben Gewicht ein. Auch alle möglichen Richtungen der Fließlinien sind gleichgewichtet. Die Fließlinien in der Lösung treten jedoch nicht zwangsweise gleichhäufig in allen Richtungen auf.



Variante 1 mit der für die Wahl der Transformationsparameter  $a_{yx}$  und  $a_{yy}$  getroffenen Annahme des Minimums des Isotropie-Parameters liefert zwar bessere Ergebnisse als der Ansatz einer anisotropen Platte ohne Transformation, jedoch ist dieser Ansatz je nach Richtung und Dichte der Fließlinien nicht optimal.

Variante 2 findet die Transformationsparameter so, dass die innere Arbeit der Fächer minimal wird. Es wird automatisch eine Konzentration der Fließlinien in einer bestimmten Richtung berücksichtigt. Der Nachteil der zweiten Variante besteht in der höheren Anzahl von Optimierungsparametern, wodurch der Optimierungslauf verlangsamt wird. Vor allem bei der unten beschriebenen erweiterten Transformationsregel kann eine Erhöhung der Rechendauer auftreten.

Es ist zu erwarten, dass die zweite Variante bessere Ergebnisse (d.h. kleinere Traglasten) als die erste Variante liefert, allerdings auch die rechenintensivere Herangehensweise ist. Die Anwendung der oben aufgeführten, arbeitskonsistenten Transformationsgleichungen ist dazu unbedingt erforderlich.

#### **Erweiterte Transformationsregel - Variante 3**

Verschiedene Fächersegmente können durchaus unterschiedliche optimale Transformationsparameter aufweisen. Dies lässt sich erklären, indem man die Transformation nicht als Transformation der Gesamtplatte betrachtet, sondern in der Transformation ein Mittel zur Beeinflussung des Verlaufs der Fließlinien im Fächerinneren erkennt. Wenn die Fließlinien in den verschiedenen Fächersegmenten in verschiedene Richtungen verlaufen, so wird auch die optimale Koordinatentransformation eine unterschiedliche sein. Somit kann der Verlauf der Fließlinien in jedem der Fächer unabhängig von den anderen Fächern optimiert werden.

In Vorgehensweise 3 sind somit je Fächersegment zwei zusätzliche Optimierungsparameter zu bestimmen. Im Vergleich zur Variante 2 erhöht sich die Qualität der Ergebnisse noch einmal, gleichzeitig wird durch die zusätzlichen Optimierungsparameter auch der Rechenaufwand größer.

Dieses Vorgehen nach Variante 3 wäre mit den Transformationsregeln von Jones und Wood nicht möglich. Die Bedingung der Arbeitskonsistenz ist dazu unbedingt erforderlich.



## 8 Weitere Betrachtungen

### 8.1 Unterzüge und Steifen

Unterzüge und Steifen können auf einfache Weise berücksichtigt werden. Dazu sind für die Unterzüge die plastischen Momente  $M_u^+$  und  $M_u^-$  vorzugeben. An den Stellen, an denen eine Fließlinie den Unterzug kreuzt, kann die Relativverdrehung und daraus die innere Arbeit des Fließgelenkes im Unterzug berechnet werden.

### 8.2 Gelenkiger Rand und Einspannung

In der Fließlinientheorie ist eine Unterscheidung zwischen gelenkigem und eingespanntem Rand unnötig. Denn auch in einem eingespannten Rand tritt eine Verdrehung der Platte auf, wenn sich dort eine Fließlinie ausbildet. Andererseits ist ein gelenkiger Rand nichts anderes als eine Einspannung ohne ein plastisches Moment.

Beide Zustände sind Spezialfälle eines Meta-Randes: dem Rand mit abgemindertem plastischen Moment.

Definiert man einen Parameter  $cl$

$$0 \leq cl \leq 1 \tag{8.1}$$

mit einem Abminderungsfaktor für das plastische Moment an der Einspannstelle, so erhält man für  $cl = 0$  eine gelenkige Lagerung, und für  $cl = 1$  eine Einspannung.

Zwischenwerte treten bei Stahlbetonplatten auf, wenn bei einer Einspannung der Platte ein Teil der Bewehrung kurz vor der Einspannstelle endet bzw. keine ausreichende Verankerungslänge für die Aufnahme des Einspannmomentes aufweist. Bei Stahlplatten wäre eine Anwendung im Zusammenhang mit Verstärkungsblechen denkbar. (Siehe Abbildung 8.1)

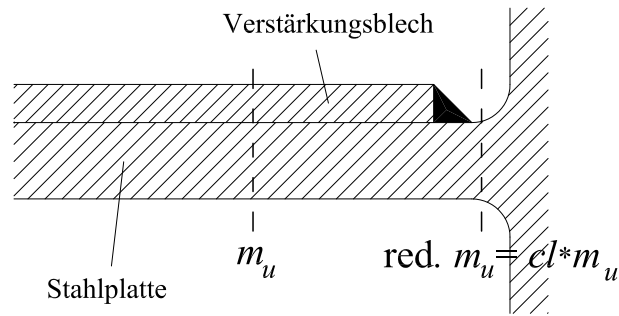


Abbildung 8.1: Einspannstelle einer verstärkten Stahlplatte

Auch wenn die Zwischenwerte für  $cl$  ohne große baupraktische Relevanz sind, so gewinnt man dennoch die Erkenntnis, dass bei einer Fließlinienuntersuchung rein methodisch nicht zwischen einem gelenkigen Rand und einer Einspannung unterschieden werden muss.

### 8.3 Symmetrie

Das maßgebende Fließlinienmuster für symmetrische Platten mit symmetrischer Belastung muss nicht zwangsweise ebenfalls symmetrisch sein, wie leicht anhand der in Abbildung 8.2a dargestellten zweiseitig gelagerten Sechseckplatte mit konstanter Flächenlast einzusehen ist. Es gibt hier zwei verschiedene, zueinander symmetrische Fließlinienmuster (Abbildung 8.2b,c), die beide dieselbe maßgebende Traglast liefern.

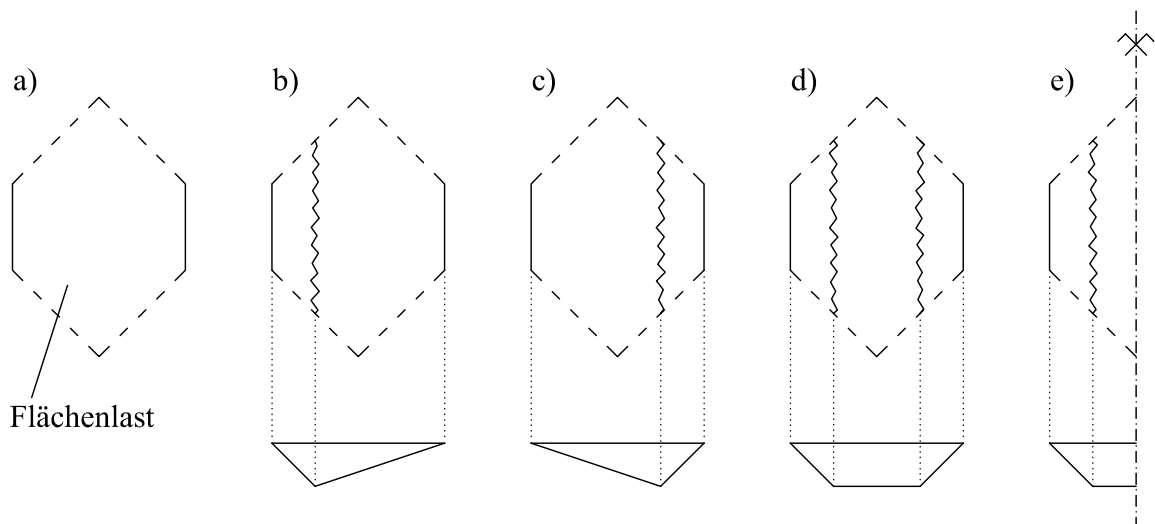


Abbildung 8.2: Fließlinienmuster bei symmetrischen Platten

Gleichzeitig kann jedoch auch eine beliebige Linearkombination beider Muster auftreten. Insbesondere auch jene mit der in Abbildung 8.2d dargestellten Verschiebungsfigur. Diese ist dann wieder symmetrisch, das System ist jetzt jedoch zweifach kinematisch.

Die numerische Analyse des halben Systems in Abbildung 8.2e findet nur diese symmetrische Lösung, berechnet aber ansonsten den richtigen Traglastfaktor. Die Ausnutzung der Symmetrie für eine Fließlinienberechnung ist somit prinzipiell möglich.

Wie in Teil III dieser Arbeit noch zu sehen sein wird, ist der Aufwand für die Fließlinienberechnung primär von der Anzahl der Plattenränder abhängig. Die Ausnutzung der Symmetrie ist also nur dann sinnvoll, wenn dadurch die Anzahl der Plattenränder reduziert wird. Im Beispiel in Abbildung 8.2 ist dies der Fall, das Ausgangssystem hat sechs, das halbe System hat vier Plattenränder.



# Teil II

## Elementdefinition





## 9 Übersicht

Wie bereits in Kapitel 4 dargestellt, wird die Platte durch die Fließlinien in eine endliche Anzahl von Plattensegmenten unterteilt. Es können zwei Arten von Plattensegmenten auftreten:

**Ebene Plattensegmente** treten an gestützten Plattenrändern auf.

**Fächerelemente** treten unter anderem in Plattenecken und an Punktlasten auf. In den Fließlinienfächern liegen die Fließlinien unendlich dicht nebeneinander. Die virtuelle Verdrehung in der einzelnen Fließlinie geht dabei gegen Null.

Zwischen diesen Plattensegmenten sind diskrete Fließlinien vorhanden:

**Gerade Fließlinien** zwischen zwei ebenen Plattensegmenten.

**Gekrümmte Fließlinien** wenn eines der angrenzenden Plattensegmente ein Fächer ist.

Programmtechnisch sind im Sinne der objektorientierten Programmierung Objekte (Datenstrukturen mit Attributen und Methoden) zu definieren, die diese zwei Arten von Plattensegmenten und diese zwei Arten von diskrete Fließlinien beschreiben. In den folgenden Kapiteln werden die einzelnen Objekttypen näher beschrieben und die erforderlichen Gleichungen hergeleitet.



## 10 Diskrete Fließlinien

### 10.1 Gerade Fließlinien

#### 10.1.1 Allgemein

Gerade Fließlinien treten nur zwischen zwei ebenen Plattensegmenten oder an ebenen Plattensegmenten am Rande des Fließlinienmusters auf.

Die gerade Fließlinie wird durch den Anfangs- und den Endpunkt sowie den beiden angrenzenden Plattensegmenten definiert.

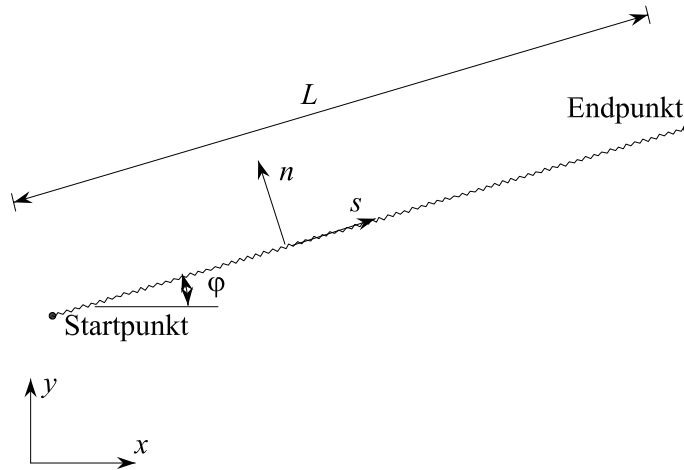


Abbildung 10.1: gerade Fließlinie

#### 10.1.2 Virtuelle innere Arbeit

Für die innere Arbeit der Fließlinie gilt die allgemeine Formel aus Gleichung 5.2:

$$-\delta A_i = \int m_u^\pm(\varphi) \delta \Delta \theta ds \quad (10.1)$$

Für die gerade Fließlinie ist der Richtungswinkel der Fließlinie  $\varphi$  in jedem Punkt gleich. Ebenso ist die virtuelle Relativverdrehung zwischen den beiden ebenen Plattensegmenten über die Länge der Fließlinie konstant.

Damit läßt sich das Integral auflösen:

$$-\delta A_i = m_u^\pm(\varphi) \delta \Delta \theta \cdot L \quad (10.2)$$

Um das Vorzeichen der virtuellen Relativverdrehung einer Fließlinie ermitteln zu können, ist für die Fließlinie ein Richtungssinn festzulegen (Richtungsvektor  $r = (r_x, r_y)^T$ ,  $\|r\| = 1$ ). Dieser Richtungssinn ist durch Start- und Endpunkt der Fließlinie gegeben. So kann definiert werden, welches Plattensegment links bzw. rechts der Fließlinie liegt. Der Normalenvektor  $n = (n_x, n_y)^T = (-r_y, r_x)^T$  zeigt in Richtung des links gelegenen Plattensegments. Für die beiden Plattensegmente müssen die Werte  $\delta w_{l,x}$ ,  $\delta w_{l,y}$ ,  $\delta w_{r,x}$  und  $\delta w_{r,y}$  der virtuellen Neigungen der Plattensegmente errechnet werden.

Der Rotationswinkel der virtuellen Relativverdrehung in der Fließlinie errechnet sich, aus der Neigung der Plattensegmente in Richtung des Normalenvektors:

$$\delta \Delta \theta = \frac{n_x \delta w_{r,x} + n_y \delta w_{r,y}}{\|n\|} - \frac{n_x \delta w_{l,x} + n_y \delta w_{l,y}}{\|n\|} \quad (10.3)$$

Durch Einsetzen von  $n = (n_x, n_y)^T = (-r_y, r_x)^T$  und  $\|n\| = \|r\| = 1$  erhält man

$$\delta \Delta \theta = r_x (\delta w_{r,y} - \delta w_{l,y}) + r_y (\delta w_{l,x} - \delta w_{r,x}) \quad (10.4)$$

Aus der Berechnung der Schnittgeraden der beiden Flächen erhält man die Beziehung  $\frac{r_x}{r_y} = \frac{\delta w_{r,y} - \delta w_{l,y}}{\delta w_{l,x} - \delta w_{r,x}}$ . Damit kann man die virtuelle Relativverdrehung auch schreiben als

$$\delta \Delta \theta = \frac{\delta w_{r,y} - \delta w_{l,y}}{r_x} = \frac{\delta w_{l,x} - \delta w_{r,x}}{r_y} \quad (10.5)$$

Aus dem Vorzeichen der virtuellen Relativverdrehung folgt das zugehörige plastische Moment in der Fließlinie.

$$\begin{aligned} m_u(\varphi) &= m_u^+(\varphi) \quad \text{falls} \quad \delta \Delta \theta > 0 \\ m_u(\varphi) &= m_u^-(\varphi) \quad \text{falls} \quad \delta \Delta \theta < 0 \end{aligned} \quad (10.6)$$

### 10.1.3 Virtuelle äußere Arbeit

Die allgemeine Gleichung 5.1 für die äußere Arbeit einer Linienlast  $p_L$  entlang einer geraden Linie lautet:

$$\delta A_a = \int_L \delta w p_L ds = p_L \cdot \frac{\delta w_1 + \delta w_2}{2} L \quad (10.7)$$

## 10.2 Gekrümmte Fließlinien

### 10.2.1 Allgemein

Die Fließlinien am Rand der in Abschnitt 4.6 beschriebenen Fließlinienfächer verlaufen nicht geradlinig sondern gekrümmt.

Für die geometrische Beschreibung der Fließlinien werden in dieser Arbeit rationale Bézier-Splines (siehe Farin [15, 16]) zweiter Ordnung verwendet.

Die Gleichung der Splinekurve lautet:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 ws_i P_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 ws_i B_i^2(t)} \quad (10.8)$$

$t$  ist die lokale Streckenkoordinate des Splines ( $0 \leq t \leq 1$ ). Der Spline wird durch drei Kontrollpunkte definiert:

$P_0$	Startpunkt ( $t = 0$ )
$P_2$	Endpunkt ( $t = 1$ )
$P_1$	mittlerer Kontrollpunkt

Die Punkte werden dreidimensional mit der virtuellen Verschiebung als dritte Koordinate angegeben:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \delta w \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

Zusätzlich besitzt jeder der Kontrollpunkte einen Gewichtungsfaktor  $ws_i$ , über den die Form der Splinekurve ebenfalls beeinflusst werden kann. Wie Farin in [15, 16] zeigt, können die Gewichtungsfaktoren von Start- und Endpunkt konstant auf 1 gesetzt werden, ohne dass die repräsentierbare Formenvielfalt eingeschränkt wird. Im Fall des Splines zweiter Ordnung bleibt also nur der Gewichtungsfaktor  $ws_1$  als relevanter Parameter.

Die variable  $B_i^n$  beschreibt das  $i$ -te Bernstein-Polynom  $n$ -ten Grades.

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (10.10)$$

Speziell ist:

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2t(1-t) \\ B_2^2(t) &= t^2 \end{aligned} \quad (10.11)$$

Die Ableitungen der Bernsteinpolynome werden im folgenden kurz mit  $\dot{B}_i^n(t)$  bzw.  $\ddot{B}_i^n(t)$  bezeichnet.

$$\begin{aligned}\dot{B}_i^n(t) &= \frac{dB_i^n(t)}{dt} \\ \ddot{B}_i^n(t) &= \frac{d^2 B_i^n(t)}{dt^2}\end{aligned}\tag{10.12}$$

Rationale Bézier-Splines besitzen eine Reihe von Eigenschaften, die sie als ideal für die Beschreibung der gekrümmten Fließlinien erscheinen lassen:

- *Splinekurven sind sehr flexibel und können beliebige räumliche Kurven gut annähern. Insbesondere können die hier verwendeten Splines zweiter Ordnung beliebige Kegelschnitte exakt wiedergeben.*

Einige bekannte Lösungen für Fließlinienprobleme besitzen gekrümmte Fließlinien in Form von Kegelschnitten. Ellipsen, insbesondere auch Kreise, Hyperbeln und Parabeln können von den rationalen Bézier-Splines exakt beschrieben werden.. Der Parameter  $ws_1 > 0$  beeinflusst die Art des Kegelschnittes:

$ws_1 < 1$  Ellipse

$ws_1 = 1$  Parabel (identisch mit den „einfachen“ Bézier-Splines zweiter Ordnung)

$ws_1 > 1$  Hyperbel

In Abbildung 10.2 ist der Kreis als Spezialfall einer Ellipse besonders hervorgehoben. Diese kann nur auftreten, wenn die Strecken  $P_0P_1$  und  $P_1P_2$  gleichlang sind.

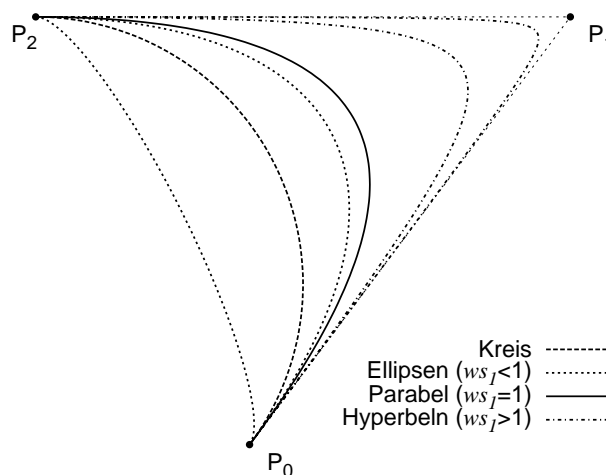


Abbildung 10.2: Rationale Bézier-Splines bei Variation von  $ws_1$

- *Die Splinekurve zweiter Ordnung befindet sich komplett in der Ebene der drei Kontrollpunkte.*

Diese Eigenschaft sichert die Kompatibilität am Übergang von einem ebenen Plattensegment zu einem Fächersegment.

Alle drei Kontrollpunkte des Splines müssen auf der Ebene des ebenen Plattensegments liegen. Nur dann kann die Splinekurve eine Randkurve des ebenen Plattensegments sein.

- *Die Geometrie der Splines ist invariant gegenüber affinen Transformationen.*

Für die Optimierung des Fließlinienmusters soll die Platte einer affinen Transformation unterzogen werden. Dabei darf sich die Lage der Fließlinien nicht verändern.

- *Die Geraden  $P_0P_1$  und  $P_1P_2$  sind Tangenten an die Splinekurve.*

Bei Randfließlinien von Eckfächern tritt in der Regel der Fall auf, dass die Punkte  $P_0$  und  $P_2$  auf zwei benachbarten Plattenrändern liegen.

Für diese Fächer ist damit ein einfacher Test möglich, ob auch jeder Punkt des Fächers innerhalb der Platte liegt: Dies ist dann der Fall, wenn auch der Punkt  $P_1$  des Kegelschnittes im Inneren der Platte liegt. Es muss dabei nur die Lage von  $P_1$  relativ zu diesen beiden Plattenrändern der Ecke geprüft werden, da Schnittpunkte mit anderen Plattenrändern für diese Fließlinie nicht relevant werden.

### 10.2.2 Virtuelle innere Arbeit

Auch für die innere Arbeit der gekrümmten Fließlinien gilt die allgemeine Formel aus Gleichung 5.2:

$$-\delta A_i = \int m_u^\pm(\varphi) \delta \Delta \theta ds \quad (10.13)$$

Im Gegensatz zu den geraden Fließlinien aus Abschnitt 10.1.2 ist jedoch eine analytische Auswertung des Integrals nicht möglich. Für die gekrümmte Fließlinie ist der Richtungswinkel der Fließlinie  $\varphi$  veränderlich. Ebenso kann die virtuelle Relativverdrehung zwischen den beiden angrenzenden Plattensegmenten über die Länge der Fließlinie variieren. Insbesondere kann es auch zu Unstetigkeiten im Integranden von Gleichung 10.13 kommen, wenn das Vorzeichen der virtuellen Relativverdrehung über die Länge der Fließlinie nicht konstant ist. Das Integral in Gleichung 10.13 lässt sich daher nicht allgemein analytisch auflösen. Es ist eine numerische Berechnung der inneren Arbeit erforderlich.

Prinzipiell gelten für die virtuelle Relativverdrehung sowie für den Betrag und das Vorzeichen des plastischen Moments der gekrümmten Fließlinien dieselben Formeln,

die auch für die geraden Fließlinien in Abschnitt 10.1.2 gelten. Allerdings müssen diese Werte bei der numerischen Integration für jeden Punkt neu bestimmt werden.

### 10.2.3 Virtuelle äußere Arbeit

Die allgemeine Gleichung 5.1 für die äußere Arbeit einer Linienlast  $p_L$  gilt auch für die gekrümmten Linien:

$$\delta A_a = \int_L \delta w p_L ds \quad (10.14)$$

df Allerdings führt auch dieses Integral zu einem Ausdruck, der sich nicht analytisch auflösen läßt. Es ist eine numerische Integration erforderlich.



# 11 Plattensegmente

## 11.1 Ebenes Plattensegment

### 11.1.1 Virtuelle innere Arbeit

In ebenen Plattensegmenten ist das vorhandene Plattenbiegemoment kleiner als das plastische Grenzmoment. Im Inneren der ebenen Plattensegmente tritt keine plastische Verformung auf. Die virtuelle innere Arbeit der ebenen Plattensegmente ist somit Null.

$$-\delta A_i = 0 \quad (11.1)$$

### 11.1.2 Virtuelle äußere Arbeit

#### Einzellasten

$P(x_P, y_P)$  sei der Lastangriffspunkt einer Einzellast. Für alle Einzellasten muss untersucht werden, auf welchem Plattensegment sie sich befinden.

Wenn sich die Einzellast auf einem ebenen Plattensegment befindet, kann aus der Ebenengleichung des ebenen Plattensegments die virtuelle Verschiebung  $\delta w_P$  bestimmt werden.

Die äußere Arbeit der Einzellast ist

$$\delta A_a = \delta w_P P \quad (11.2)$$

#### Linienlasten

Linienlasten werden stets auf einem Plattenrand definiert. Gegebenenfalls ist die Platte entlang einer Linienlast in zwei Plattenbereiche zu unterteilen. Die Berechnung der äußeren Arbeit infolge der Linienlasten erfolgt nicht über die Plattensegmente, sondern über die Ränder (nach Abschnitt 10.1.3 oder 10.2.3).

#### Flächenlasten

Die virtuelle äußere Arbeit, die von der auf das Plattensegment wirkenden Flächenlast geleistet wird, errechnet sich zu

$$\delta A_a = \int_A \delta w_P dA \quad (11.3)$$

Im einfachsten Fall ist die Flächenlast über das gesamte Plattensegment konstant, in diesem Fall lässt sich das Integral aus Gleichung 11.3 auflösen zu

$$\delta A_a = p_A \delta w(P_S) A \quad (11.4)$$

wobei  $\delta w(P_S)$  die virtuelle Verschiebung des Schwerpunkts und  $A$  der Flächeninhalt des Plattensegments ist.

Für ebene Plattensegmente mit verschiedenen Lastbereichen (z.B. Plattensegment  $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ ) in Abbildung 11.1 ließe sich die Gleichung 11.4 analog anwenden.

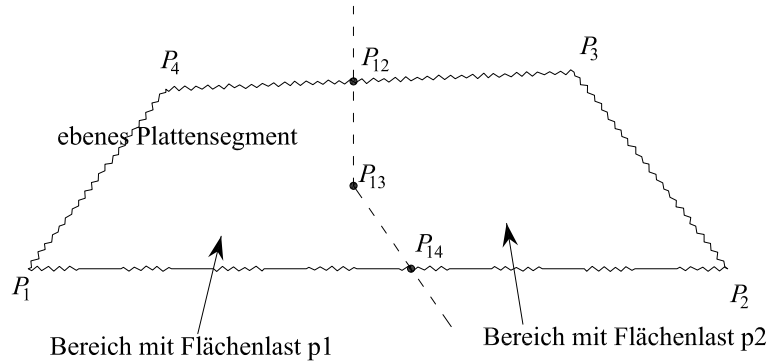


Abbildung 11.1: ebenes Plattensegment mit mehreren Lastbereichen

Dazu müsste man das Plattensegment  $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$  entlang der Lastgrenze aufteilen in zwei neue ebene Plattensegmente  $P_1 - P_{14} - P_{13} - P_{12} - P_4$  und  $P_{14} - P_2 - P_3 - P_{12} - P_{13}$ .

Die dafür notwendigen geometrischen Operationen sind jedoch aufwändig, da weder vom Plattensegment noch vom Lastbereich vorausgesetzt werden kann, dass diese konvex sind. Ein Plattensegment kann so in sehr viele kleinere Teile zerfallen. In der Literatur findet man zwar Routinen für die Polygon-Intersektion konkaver Polygone, doch ist es nicht zweckmäßig, ein einzelnes, zusammenhängendes, ebenes Plattensegment nochmals in viele neue Plattensegmente zerlegen zu müssen.

Eine wesentlich elegantere Lösung erhält man, indem man Gleichung 11.3 für Bereiche mit konstanter Flächenlast nach dem Greenschen Integralsatz als Umfangsintegral schreibt:

$$\delta A_a = \oint p_A \delta w \, du \quad (11.5)$$

Die virtuelle Verschiebung ist linear:

$$\delta w(x, y) = \delta w_{,x} (x - x_0) + \delta w_{,y} (y - y_0) + \delta w(x_0, y_0) \quad (11.6)$$

Dabei sind  $\delta w_{,x}$ ,  $\delta w_{,y}$  und  $\delta w_0$  geometrische Parameter des Plattensegments (Neigung des Segments in  $x$ - und  $y$ -Richtung, virtuelle Verschiebung im Referenzpunkt). Der Referenzpunkt  $P(x_0, y_0)$  kann beliebig gewählt werden.

Gleichung 11.5 wird zuerst über die y-Richtung, anschließend über die x-Richtung integriert. Der Umfang wird in die einzelnen Kanten aufgeteilt.

$$\delta A_a = \sum_{Kanten} p_A \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{y=0}^{y=y(x)} [\delta w_{,x}(x-x_0) + \delta w_{,y}(y-y_0) + \delta w(x_0, y_0)] dy dx \quad (11.7)$$

$$\delta A_a = \sum_{Kanten} p_A \left[ (\delta w(x_0, y_0) - \delta w_{,x} x_0 - \delta w_{,y} y_0) \int_{x=x_1}^{x=x_2} y(x) dx + \delta w_{,y} \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{y(x)^2}{2} dx + \delta w_{,x} \int_{x=x_1}^{x=x_2} x \cdot y(x) dx \right] \quad (11.8)$$

Die Integrale  $\int_{x=x_1}^{x=x_2} y(x) dx$  und  $\int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{y(x)^2}{2} dx$  werden auch für die Berechnung des Schwerpunktes des Plattensegments benötigt, und müssen nicht erneut berechnet werden. Lediglich der Wert des Integrals  $\int_{x=x_1}^{x=x_2} x \cdot y(x) dx$  ist noch zu bestimmen.

Der Referenzpunkt in Gleichung 11.8 kann für jede Kante getrennt gewählt werden, da die Wahl des Referenzpunktes keinen Einfluss auf die zu integrierende Funktion hat.

Bei der Berechnung des Summanden aus Gleichung 11.8 ist  $x_1, y_1$  der Startpunkt der Kante bei Umlauf im Uhrzeigersinn und  $x_2, y_2$  der Endpunkt der Kante.  $p_A$  ist der Betrag der Flächenlast des angrenzenden Lastbereichs. Für die inneren Kanten (im Beispiel  $P_{14} - P_{13}$  und  $P_{13} - P_{12}$ ) ist anzusetzen:

$$p_A = p_{A,rechts} - p_{A,links} \quad (11.9)$$

## 11.2 Fächersegment aus rationalen Bézier-Splines

### 11.2.1 Allgemein

In Abschnitt 4.6 wurde bereits erklärt, dass in den Bereichen der Platte, in denen sich Fließlinienfächer ausbilden, keine diskreten Fließlinien modelliert werden. Stattdessen werden diese Bereiche durch Fächersegmente beschrieben.

Das hier vorgestellte Fächersegment besitzt Fließlinien in zwei Richtungen. Demzufolge verlaufen die Fließlinien im Fächer nicht geradlinig, sondern gekrümmt.

Viele in der Literatur zu findende Lösungen für Fließlinienprobleme, in denen Fließlinienfächer eine Rolle spielen, verwenden Fächer mit (geradlinigen) Fließlinien in nur einer Richtung. Diese Lösungen genügen in der Regel nicht dem Orthogonalitätskriterium (Abschnitt 6.2). Lediglich Sawczuk [27] und Fox [18, 19] verwenden Ansätze

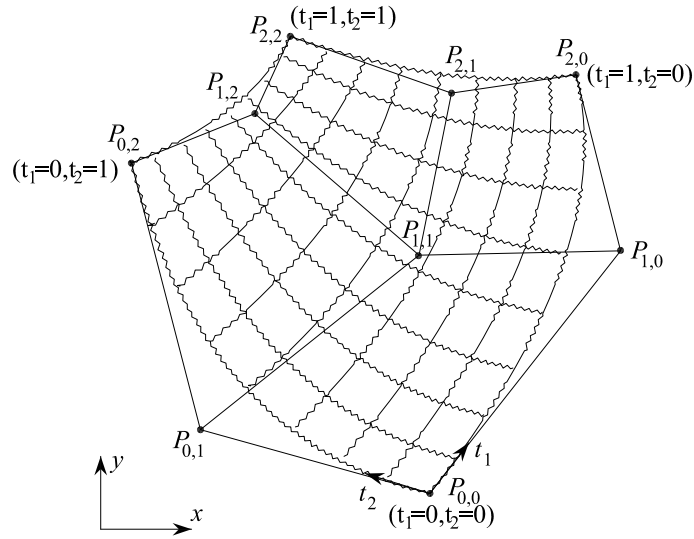


Abbildung 11.2: Fließlinienfächer mit positiven und negativen Fließlinien

mit gekrümmten Fließlinien in zwei Richtungen. In der virtuellen Verschiebungsfigur entsteht somit eine doppelt gekrümmte, räumliche Fläche.

Es ist jedoch schwierig (wenn nicht gar unmöglich), für beliebige Fließlinienfächer den Verlauf der Fließlinien direkt anzugeben. Stattdessen wird daher die Geometrie der virtuellen Verschiebungsfigur des Fächersegments beschrieben und daraus auf Verlauf der Fließlinien geschlossen.

### 11.2.2 Ansatzfunktion des Fächersegments

Die in dieser Arbeit entwickelten Fächersegmente besitzen als Ansatzfunktion eine Spline-Fläche zweiter Ordnung. Die Fläche wird durch drei Kontrollpunkte je Richtung beschrieben (Abbildungen 11.2 und 11.3). Abbildung 11.3 zeigt zwei mögliche Fächersegmente mit ihren dazugehörigen Kontrollpunktnetzen als dreidimensionale Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur. Das Beispiel in Abbildung 11.3b ist dabei der Spezialfall eines Kreisfächers.

Die Geometrie des Fächers wird in parametrisierter Form angegeben. Dazu sind zwei Parameter  $t_1$  und  $t_2$  erforderlich. Die virtuelle Verschiebung wird dabei als Koordinate berücksichtigt.

$$P(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x(t_1, t_2) \\ y(t_1, t_2) \\ \delta w(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

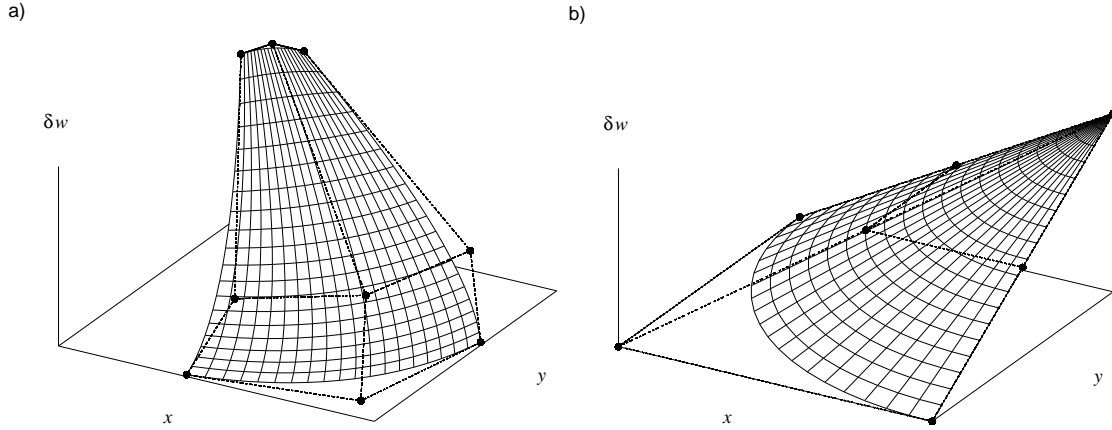


Abbildung 11.3: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur von Fächersegmenten mit Kontrollpunktnetz

Die Gleichung für die rationalen Bézier-Spline-Flächen lautet:

$$P(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)} \quad (11.11)$$

Hierin sind  $B_i^n$  die Bernsteinpolynome nach 10.10.

$P_{i,j}$  sind die Kontrollpunkte mit ihren  $x, y$ -Koordinaten, sowie ihren virtuellen Verschiebungen  $\delta w$ . Insbesondere sind die Kontrollpunkte  $P_{0,0} = P(t_1 = 0, t_2 = 0)$ ,  $P_{0,2} = P(t_1 = 0, t_2 = 1)$ ,  $P_{2,0} = P(t_1 = 1, t_2 = 0)$  und  $P_{2,2} = P(t_1 = 1, t_2 = 1)$  auch gleichzeitig die Eckpunkte der Fläche.

$w s_{i,j} > 0$  sind Gewichtungsfaktoren für die Kontrollpunkte, über welche zusätzlich die Form der Fläche beeinflusst werden kann. In der Standardform des Bézier-Splines sind die Gewichte der Eckpunkte  $w s_{0,0} = w s_{0,2} = w s_{2,0} = w s_{2,2} = 1$ , so dass die Flächenform zusätzlich durch fünf unabhängige Parameter beschrieben wird.

Für die lokalen Koordinaten  $t_1$  und  $t_2$  gilt  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ .

Rationale Bézier-Splines erscheinen aus folgenden Gründen ideal für die Beschreibung der Fächersegmente:

- Die Randkurven der Splinefläche entsprechen der Splinekurve, welche durch die drei Kontrollpunkte des Randes gebildet wird.

Die Kompatibilität der virtuellen Verschiebung zwischen benachbarten Plattensegmenten muss gewährleistet sein. Dazu genügt es, wenn die diskrete Fließlinie am Fächerrand mit den drei zum Rand gehörenden Kontrollpunkten und den zugehörigen Gewichtungsfaktoren gebildet wird. Ein weiteres Fächersegment, das an diese Fließlinie angrenzt, muss auch wieder dieselben Kontrollpunkte und Gewichtungsfaktoren verwenden.

- *Die Form der Splinefläche ist invariant gegenüber einer affinen Transformation.*

Für die Optimierung des Fließlinienmusters wird die Platte einer affinen Transformation unterzogen. Die Geometrie der Splinefläche bleibt bei dieser Transformation unverändert. Diese Eigenschaft ist unbedingt erforderlich, um die Transformation auf das Fächersegment anwenden zu können.

Lediglich die Hauptkrümmungsrichtungen und somit die Richtungen der Fließlinien werden verändert. Dadurch wird durch die Transformation die virtuelle innere Arbeit des Fließlinienfächers beeinflusst, während die äußere Arbeit konstant bleibt.

- *Die Splinefläche befindet sich komplett innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.*

Mit diesem Wissen kann häufig Rechenzeit gespart werden. Wenn beispielsweise getestet werden soll, ob sich eine Einzellast innerhalb des Fächersegments befindet, ist vorab ein Schnelltest möglich, indem der Lastangriffspunkt auf seine Lage relativ zur konvexen Hülle oder zum einhüllenden Rechteck der Kontrollpunkte geprüft wird.

### Gültigkeit der Spline-Flächen

Die Richtung der virtuellen Verschiebung eines Punktes der Platte ist immer senkrecht zur Platte. Somit kann man stets jedem Punkt  $P(x_P, y_P)$  im Bereich eines Fächers **eindeutig** einen Punkt in der virtuellen Verschiebungsfigur  $P(x_P, y_P, \delta w_P)$  zuordnen. Die in Abbildung 11.4 dargestellten Splineflächen sind überschlagen, d.h. es gibt Punkte  $P(x_P, y_P)$ , zu denen es mehr als eine virtuelle Verschiebung gibt. Diese Splineflächen sind folglich als Fächersegment nicht zulässig.

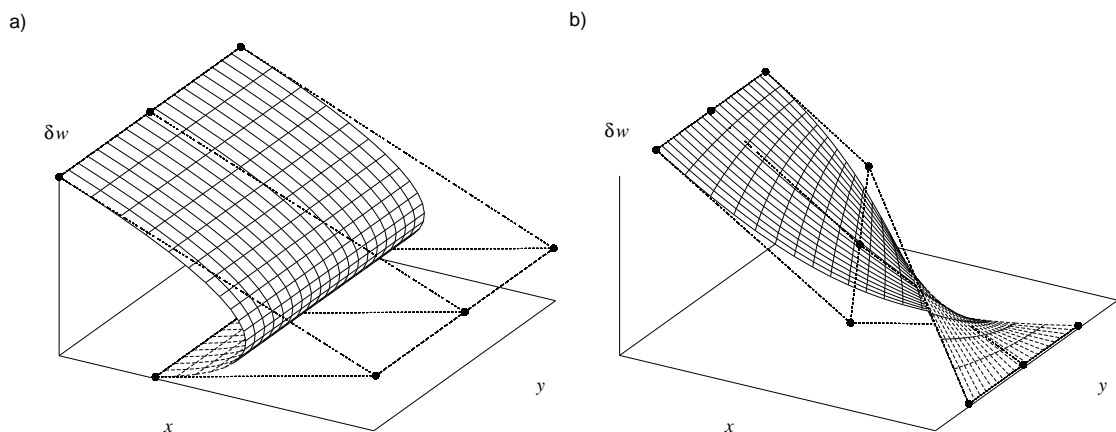


Abbildung 11.4: 3D-Darstellung von ungültigen Splineflächen mit Kontrollpunktnetz

Bei den überschlagenen, ungültigen Splineflächen gibt es immer Bereiche, in denen die Unterseite der Splinefläche nach oben zeigt. Um die ungültigen Splineflächen zu erkennen, berechnet man das infinitesimale Flächenstück  $dA$ :

$$dA = (y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1}) dt_2 dt_1 \quad (11.12)$$

Bei den gültigen Splineflächen ist  $dA$  in jedem Punkt größer oder gleich Null. An den Stellen, an denen die Unterseite der Splinefläche nach oben zeigt, wird  $dA$  negativ.

Da die Berechnung der virtuellen inneren und äußeren Arbeit der Fächersegmente (siehe unten) ohnehin die Berechnung von  $dA$  erfordert, kann die Prüfung der Gültigkeit einer Splinefläche ohne Zusatzaufwand erfolgen.

### Ableitungen nach den Flächenkoordinaten $t_1$ und $t_2$

Um den Rechenaufwand gering zu halten, sollten bereits errechnete Werte möglichst effektiv wiederverwendet werden. Betrachtet man dazu den Nenner des Bruches aus Gleichung 11.11:

$$N(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) \quad (11.13)$$

so lassen sich dessen Ableitungen

$$\begin{aligned} N_{,t_1} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} \dot{B}_i^2(t_1) B_j^2(t_2) \\ N_{,t_2} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} B_i^2(t_1) \dot{B}_j^2(t_2) \end{aligned} \quad (11.14)$$

sinnvoll wiederverwenden.

Dann ist

$$\begin{aligned} P_{,t_1} &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} \dot{B}_i^2(t_1) B_j^2(t_2) - P(t_1, t_2) N_{,t_1}}{N} \\ P_{,t_2} &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} B_i^2(t_1) \dot{B}_j^2(t_2) - P(t_1, t_2) N_{,t_2}}{N} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Analog gilt für die höheren Ableitungen:

$$\begin{aligned} P_{,t_1 t_1} &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} \ddot{B}_i^2(t_1) B_j^2(t_2) - 2P_{,t_1} N_{,t_1} - P N_{,t_1 t_1}}{N} \\ P_{,t_2 t_2} &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} B_i^2(t_1) \ddot{B}_j^2(t_2) - 2P_{,t_2} N_{,t_2} - P N_{,t_2 t_2}}{N} \\ P_{,t_1 t_2} &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} \dot{B}_i^2(t_1) \dot{B}_j^2(t_2) - P_{,t_1} N_{,t_2} - P_{,t_2} N_{,t_1} - P N_{,t_1 t_2}}{N} \end{aligned} \quad (11.16)$$

**Ableitungen nach den Optimierungsparametern  $p_k$** 

Im Rahmen der Optimierung ist die Ableitung der Splinefläche nach den Optimierungsparametern  $p_k$  zu berechnen. In Gleichung 11.11 sind nur Kontrollpunkte von den Optimierungsparametern abhängig sowie die Gewichtungsfaktoren  $w_s$  direkt als Optimierungsparameter enthalten.

Für die Gewichtungsfaktoren  $w_{s_{i,j}}$  als Optimierungsparameter  $p_k$  gilt:

$$P_{,p_k} = \frac{(P_{i,j} - P(t_1, t_2))B_i^2(t_1)B_j^2(t_2)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{s_{i,j}} B_i^2(t_1)B_j^2(t_2)} = \frac{(P_{i,j} - P(t_1, t_2))B_i^2(t_1)B_j^2(t_2)}{N} \quad (11.17)$$

und für alle anderen Optimierungsparameter:

$$P_{,p_k} = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{s_{i,j}} \frac{d(P_{i,j})}{dp_k} B_i^2(t_1)B_j^2(t_2)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{s_{i,j}} B_i^2(t_1)B_j^2(t_2)} = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{s_{i,j}} \frac{d(P_{i,j})}{dp_k} B_i^2(t_1)B_j^2(t_2)}{N} \quad (11.18)$$

**11.2.3 Verlauf der Fließlinien**

Im Fächerinneren bilden sich in zwei Richtungen gekrümmte Fließlinien aus. Durch diese Fließlinien wird die Fächerfläche in viele, infinitesimal kleine Vierecke unterteilt (Abbildung 11.5). Um ein kinematisches System zu erzeugen, müssen diese infinitesimalen Vierecke in der virtuellen Verschiebungsfigur eben bleiben.

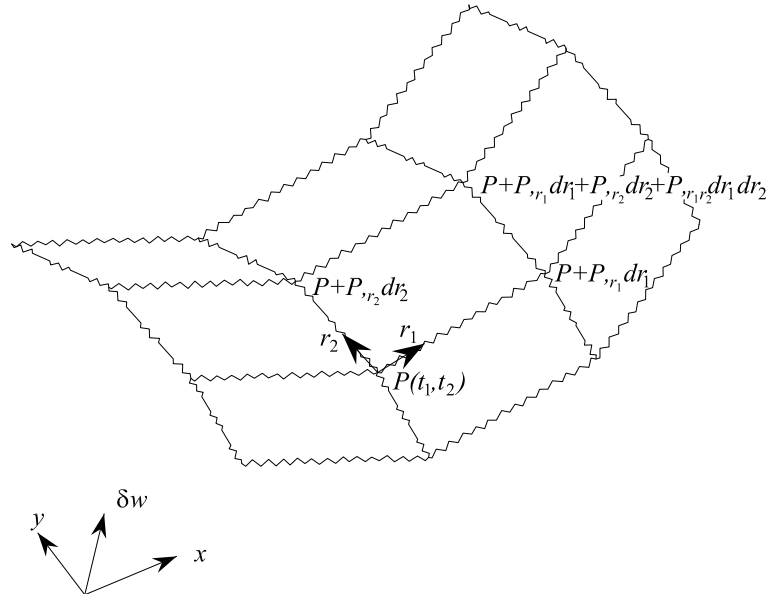


Abbildung 11.5: Fächer mit infinitesimalem Segment



$r_1$  und  $r_2$  seien ganz allgemein die Richtungen (in der  $x,y$ -Ebene) der Fließlinien im Punkt  $P(t_1, t_2)$ . Geht man von einem beliebigen Punkt  $P$  des Fließlinienfächers aus einen infinitesimalen Schritt in Richtung der Fließlinie  $r_1$ , so gelangt man zum Punkt  $P + P_{,r_1} dr_1$ . Bei einem infinitesimalen Schritt in Richtung der Fließlinie  $r_2$  gelangt man zum Punkt  $P + P_{,r_2} dr_2$ . Nach einem Schritt in Richtung  $r_1$  und  $r_2$  kommt man zum Punkt  $P + P_{,r_1} dr_1 + P_{,r_2} dr_2 + P_{,r_1 r_2} dr_1 dr_2$ . Dabei ist:

$P_{,r_1}$  ... Richtungsvektor der Fließlinie in Richtung  $r_1$  im Punkt  $P$

$P_{,r_2}$  ... Richtungsvektor der Fließlinie in Richtung  $r_2$  im Punkt  $P$

$P_{,r_1 r_2}$  ... Twistvektor im Punkt  $P$

Dann muss sich der Vektor  $(P + P_{,r_1} dr_1 + P_{,r_2} dr_2 + P_{,r_1 r_2} dr_1 dr_2) - P$  als Linearkombination aus den Vektoren  $(P + P_{,r_1} dr_1) - P$  und  $(P + P_{,r_2} dr_2) - P$  darstellen lassen:

$$\forall t_1, t_2 \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 : \quad P_{,r_1} dr_1 + P_{,r_2} dr_2 + P_{,r_1 r_2} dr_1 dr_2 = \lambda_1 P_{,r_1} dr_1 + \lambda_2 P_{,r_2} dr_2 \quad (11.19)$$

(mit  $\forall$  als All- und  $\exists$  als Existenzquantor)

Die notwendige Bedingung für eine kinematische Kette lautet folglich:

$$\forall t_1, t_2 \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 : \quad \delta w_{,r_1 r_2}(t_1, t_2) = (\lambda_1 - 1) \delta w_{,r_1}(t_1, t_2) + (\lambda_2 - 1) \delta w_{,r_2}(t_1, t_2) \quad (11.20)$$

Gleichung 11.20 besagt, dass der Twistvektor der virtuellen Verschiebungsfigur im Punkt  $P$  in der Tangentialebene liegen muss.

Diese Gleichung ist stets für die Hauptkrümmungsrichtungen  $r_1 = \xi$  und  $r_2 = \eta$  erfüllt, da  $\delta w_{,\xi\eta} = 0$  und somit  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  ist.

Es kann angenommen werden, dass die Fließlinien, die sich innerhalb des Fächers bilden, den Hauptkrümmungstrajektorien der Fläche folgen. Diese Richtung der Fließlinien ist auch mechanisch plausibel, da entlang der maximalen Krümmung auch die maximalen Momente auftreten. Die Hauptkrümmungsrichtungen erfüllen das Orthogonalitätskriterium, d.h. positive und negative Fließlinien sind stets senkrecht zueinander.

Da sowohl das Orthogonalitätskriterium, als auch die Annahme des Versagens entlang der Hauptkrümmungsrichtungen nur für isotrope Platten zutreffend sind, erscheint es sinnvoll, anisotrope Platten durch eine geeignete Transformation (siehe Abschnitt 7) in ein isotropes Problem zu überführen, um eine möglichst hohe Qualität der Lösung zu gewährleisten.

#### 11.2.4 Virtuelle innere Arbeit

Bei der Berechnung der virtuellen inneren Arbeit der Fließlinien im Fächer kann nicht mehr das Produkt aus virtueller Relativverdrehung und plastischem Moment gebildet werden, da die Relativverdrehung in jeder einzelnen Fließlinie gegen Null geht. Stattdessen ergibt sich die innere Arbeit aus der Krümmung der virtuellen Verschiebungsfigur in Richtung des plastischen Moments der Fließlinien multipliziert

mit dem Betrag des plastischen Moments. Dieses Produkt muss für beide Fließlinienrichtungen bestimmt werden und über die Fläche des Fächersegments aufintegriert werden. Da die Fließlinienrichtungen mit den Hauptkrümmungsrichtungen  $\xi$  und  $\eta$  zusammenfallen sollen, gilt für die innere Arbeit:

$$-\delta A_i = \int_A [m_{u,\xi}^\pm \delta \kappa_\xi + m_{u,\eta}^\pm \delta \kappa_\eta] dA \quad (11.21)$$

Mit

$$\begin{aligned} m_{u,\xi}^\pm &= m_u^+(\varphi_\xi) \quad \text{falls} \quad \delta \kappa_\xi > 0 \\ m_{u,\xi}^\pm &= m_u^-(\varphi_\xi) \quad \text{falls} \quad \delta \kappa_\xi < 0 \\ m_{u,\eta}^\pm &= m_u^+(\varphi_\eta) \quad \text{falls} \quad \delta \kappa_\eta > 0 \\ m_{u,\eta}^\pm &= m_u^-(\varphi_\eta) \quad \text{falls} \quad \delta \kappa_\eta < 0 \end{aligned} \quad (11.22)$$

In den Fächerkoordinaten wird daraus

$$-\delta A_i = \int_0^1 \int_0^1 [m_{u,\xi}^\pm \delta \kappa_\xi + m_{u,\eta}^\pm \delta \kappa_\eta] (y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1}) dt_2 dt_1 \quad (11.23)$$

Die Krümmungen in den Hauptrichtungen errechnen sich zu

$$\begin{aligned} \delta \kappa_\xi &= -\delta w_{,\xi\xi} \\ \delta \kappa_\eta &= -\delta w_{,\eta\eta} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Die folgenden Gleichungen werden zur Berechnung der virtuellen Krümmungen der Fließfläche benötigt.

$$\delta w(t_1, t_2) = \delta w(x(t_1, t_1), y(t_1, t_2)) \quad (11.25)$$

Gleichung (11.25) wird nach  $t_1$  und  $t_2$  abgeleitet:

$$\begin{aligned} \delta w_{,t_1} &= \delta w_{,x} x_{,t_1} + \delta w_{,y} y_{,t_1} \\ \delta w_{,t_2} &= \delta w_{,x} x_{,t_2} + \delta w_{,y} y_{,t_2} \end{aligned} \quad (11.26)$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man die Neigung der Fläche:

$$\begin{aligned} \delta w_{,x} &= \frac{y_{,t_1} \delta w_{,t_2} - y_{,t_2} \delta w_{,t_1}}{y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1}} \\ \delta w_{,y} &= \frac{\delta w_{,t_1} x_{,t_2} - \delta w_{,t_2} x_{,t_1}}{y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1}} \end{aligned} \quad (11.27)$$

Die zweiten Ableitungen von Gleichung 11.25 nach  $t_1$  und  $t_2$  ergeben:

$$\begin{aligned}\delta w_{,t_1 t_1} &= \delta w_{,xx} x_{,t_1}^2 + 2\delta w_{,xy} x_{,t_1} y_{,t_1} + \delta w_{,yy} y_{,t_1}^2 + \delta w_{,x} x_{,t_1 t_1} + \delta w_{,y} y_{,t_1 t_1} \\ \delta w_{,t_1 t_2} &= \delta w_{,xx} x_{,t_1} x_{,t_2} + \delta w_{,xy} (x_{,t_1} y_{,t_2} + x_{,t_2} y_{,t_1}) + \delta w_{,yy} y_{,t_1} y_{,t_2} + \delta w_{,x} x_{,t_1 t_2} + \delta w_{,y} y_{,t_1 t_2} \\ \delta w_{,t_2 t_2} &= \delta w_{,xx} x_{,t_2}^2 + 2\delta w_{,xy} x_{,t_2} y_{,t_2} + \delta w_{,yy} y_{,t_2}^2 + \delta w_{,x} x_{,t_2 t_2} + \delta w_{,y} y_{,t_2 t_2}\end{aligned}\tag{11.28}$$

Und somit ist

$$\begin{aligned}\delta w_{,xx} &= \frac{y_{,t_1}^2 W_{22} - 2y_{,t_1} y_{,t_2} W_{12} + y_{,t_2}^2 W_{11}}{(y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1})^2} \\ \delta w_{,yy} &= \frac{x_{,t_1}^2 W_{22} - 2x_{,t_1} x_{,t_2} W_{12} + x_{,t_2}^2 W_{11}}{(y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1})^2} \\ \delta w_{,xy} &= -\frac{x_{,t_1} y_{,t_1} W_{22} - (x_{,t_1} y_{,t_2} + x_{,t_2} y_{,t_1}) W_{12} + x_{,t_2} y_{,t_2} W_{11}}{(y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1})^2}\end{aligned}\tag{11.29}$$

Mit den Parametern

$$\begin{aligned}W_{11} &= \delta w_{,t_1 t_1} - \delta w_{,x} x_{,t_1 t_1} - \delta w_{,y} y_{,t_1 t_1} \\ W_{12} &= \delta w_{,t_1 t_2} - \delta w_{,x} x_{,t_1 t_2} - \delta w_{,y} y_{,t_1 t_2} \\ W_{22} &= \delta w_{,t_2 t_2} - \delta w_{,x} x_{,t_2 t_2} - \delta w_{,y} y_{,t_2 t_2}\end{aligned}\tag{11.30}$$

Die Bestimmung der Hauptkrümmungen erfolgt wie gewohnt:

$$\begin{aligned}-\delta \kappa_\xi &= \delta w_{,\xi\xi} = \delta w_{,xx} \cos^2 \varphi + \delta w_{,yy} \sin^2 \varphi + 2\delta w_{,xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ -\delta \kappa_\eta &= \delta w_{,\eta\eta} = \delta w_{,xx} \sin^2 \varphi + \delta w_{,yy} \cos^2 \varphi - 2\delta w_{,xy} \sin \varphi \cos \varphi\end{aligned}\tag{11.31}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\delta w_{,xy}}{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}\tag{11.32}$$

$\varphi$  ist der Winkel zwischen den Hauptkrümmungsachsen und dem  $xy$ -Koordinatensystem mit dem erweiterten Wertebereich  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Dabei gilt: für  $\delta w_{,xy} > 0$  ist  $\varphi > 0$  und für  $\delta w_{,xy} < 0$  ist  $\varphi < 0$ . (Dieser erweiterte Wertebereich ist in den meisten Programmiersprachen als atan2-Funktion implementiert.)

Die folgenden Formeln gelten nur bei Beachtung des erweiterten Wertebereichs:

$$\begin{aligned}
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}\right)^2 + \delta w_{,xy}^2}} \\
\sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}\right)^2 + \delta w_{,xy}^2}} \\
\cos \varphi \sin \varphi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{,xy}}{\sqrt{\left(\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}\right)^2 + \delta w_{,xy}^2}}
\end{aligned} \tag{11.33}$$

Die Hauptkrümmungen betragen

$$\begin{aligned}
\delta \kappa_\xi = -\delta w_{,\xi\xi} &= -\frac{\delta w_{,xx} + \delta w_{,yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}\right)^2 + \delta w_{,xy}^2} \\
\delta \kappa_\eta = -\delta w_{,\eta\eta} &= -\frac{\delta w_{,xx} + \delta w_{,yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta w_{,xx} - \delta w_{,yy}}{2}\right)^2 + \delta w_{,xy}^2}
\end{aligned} \tag{11.34}$$

In Gleichung 11.32 erhält man den Winkel  $\varphi$  als den Winkel zwischen der  $x$ - und der  $\xi$ -Richtung. Bei der Berechnung der inneren Arbeit ist jedoch zu beachten, dass die Fließlinie senkrecht zur Krümmungsrichtung verläuft. Bei der Ermittlung des plastischen Moments ist daher zu beachten:

$$\begin{aligned}
m_{u,\xi} &= m_u(\varphi_\xi) = m_u\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\
m_{u,\eta} &= m_u(\varphi_\eta) = m_u(\varphi)
\end{aligned} \tag{11.35}$$

### Dreiecks-Option

In einigen Fällen, beispielsweise unter Einzellasten konzentrieren sich die radialen Fließlinien in einem Punkt. Der Kreisfächer, der sich um diese Einzellast ausbildet, muss durch mehrere Fächersegmente beschrieben werden. Abbildung 11.6 zeigt einen Kreisfächer, der durch vier Fächersegmente gebildet wird. Für eines der Fächersegmente sind die Kontrollpunkte und die inneren Fließlinien dargestellt. Ein solches Fächersegment, das ein Viertel eines Kreisfächers beschreibt, ist in Abbildung 11.3b dreidimensional als virtuelle Verschiebungsfigur dargestellt.

Die drei Fächer-Kontrollpunkte eines Randes (im Beispiel  $t_2 = 1$ ) fallen dann in einem Punkt zusammen, der Fächer entartet zu einer Dreiecksform. Dies äußert sich darin, dass  $x_{,t_1}$ ,  $y_{,t_1}$  und  $\delta w_{,t_1}$  gleichzeitig zu Null werden, ebenso wie  $x_{,t_1 t_1}$ ,  $y_{,t_1 t_1}$  und  $\delta w_{,t_1 t_1}$  und alle höheren Ableitungen.

In diesem Fall ergeben die Ausdrücke für  $\delta w_{,x}$ ,  $\delta w_{,y}$ ,  $\delta w_{,xx}$ ,  $\delta w_{,yy}$  und  $\delta w_{,xy}$  den Bruch  $\frac{0}{0}$ . (Gleichungen 11.27 und 11.29)

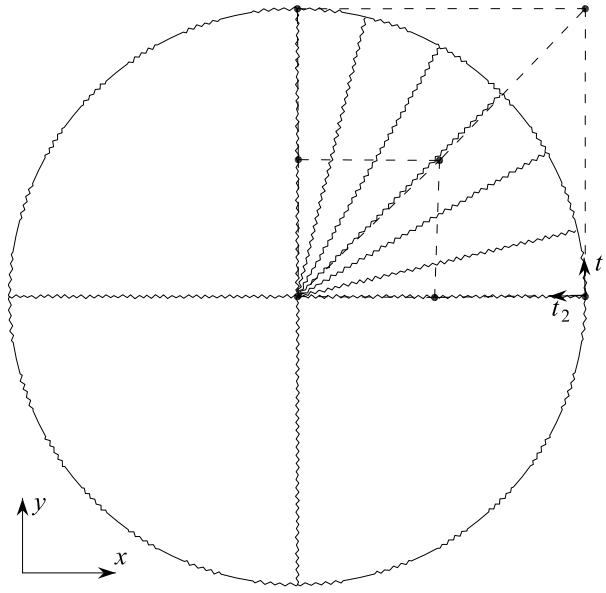


Abbildung 11.6: Kreisfächer aus vier Fächersegmenten

Bei der Auswertung des Grenzwertes mittels L'Hospital ist nach dem Parameter  $t_2$  zu differenzieren:

$$\begin{aligned} w_{,x} &= \frac{y_{,t_1 t_2} \delta w_{,t_2} - y_{,t_2} \delta w_{,t_1 t_2}}{y_{,t_1 t_2} \delta x_{,t_2} - y_{,t_2} \delta x_{,t_1 t_2}} \\ w_{,y} &= \frac{\delta w_{,t_1 t_2} x_{,t_2} - \delta w_{,t_2} x_{,t_1 t_2}}{y_{,t_1 t_2} \delta x_{,t_2} - y_{,t_2} \delta x_{,t_1 t_2}} \end{aligned} \quad (11.36)$$

Bei der Integration der inneren Arbeit der Fließlinien entlang des ‚entarteten‘ Randes sind die Längen  $dL$  gleich Null, die Werte  $\delta w_{,x}$  und  $\delta w_{,y}$  sind endlich. Die resultierende innere Arbeit aus der Fließlinie an diesem Rand wird somit zu Null. Diese Singularität lässt sich jedoch sehr einfach umgehen, indem man für die numerische Integration ein Verfahren wählt, das ohne Stützstellen an den Integrationsgrenzen auskommt.

### 11.2.5 Berücksichtigung der Transformation

In Abschnitt 7 wurde beschrieben, dass der Verlauf der Fließlinien im Inneren der Fächersegmente über eine Transformation mit der Transformationsmatrix  $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}$  beeinflusst werden kann.

Die Geometrie des Béziersplines selbst ist invariant gegenüber der Transformation, jedoch ändern sich die Richtungen der Hauptkrümmungen der Ersatzplatte. Somit variiert auch der Verlauf der Fließlinien.

Bei der Berechnung der inneren Arbeit ist die Transformation an zwei Stellen zu berücksichtigen. Zum einen werden vor dem Beginn der Berechnung die Koordinaten der Kontrollpunkte des Fächersegments mit der Matrix  $a$  transformiert.

$$P' = a \cdot P \quad (11.37)$$

Zum anderen muss das plastische Moment gemäß Gleichung 7.26 bestimmt werden.

### 11.2.6 Virtuelle äußere Arbeit

#### Einzellasten

$P(x_P, y_P)$  sei der Lastangriffspunkt einer Einzellast. Für alle Einzellasten muss untersucht werden, auf welchem Plattensegment sie sich befinden.

Wenn sich die Einzellast in einem Fächersegment befindet, müssen aus den Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$  die Fächerkoordinaten  $t_1$  und  $t_2$  bestimmt werden. Die Berechnung wird im Abschnitt 12.6 erläutert.

Damit kann auch die virtuelle Verschiebung des Lastangriffspunktes  $\delta w_P = \delta w(t_1, t_2)$  bestimmt werden.

Die äußere Arbeit der Einzellast ist

$$\delta A_a = \delta w_P P \quad (11.38)$$

#### Linienlasten

Linienlasten werden auf einem Plattenrand definiert. Die Berechnung erfolgt nach Abschnitt 10.1.3 oder 10.2.3.

#### Flächenlasten

Für die verteilte Flächenlast gilt die Gleichung

$$\delta A_a = \int_A \delta w_P dA \quad (11.39)$$

In den Fächerkoordinaten und für konstante Flächenlasten wird daraus

$$\delta A_a = p_A \int_0^1 \int_0^1 \delta w(y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1}) dt_2 dt_1 \quad (11.40)$$

Für die verwendeten Ansatzfunktionen der Fächersegmente aus rationalen Bézier-Splines ist diese Gleichung nicht analytisch integrierbar. Es ist eine numerische Integration anzuwenden.

### 11.2.7 Numerische Integration

Bei der Integration der Funktionen für die Ermittlung der äußeren und insbesondere der inneren Arbeit der Fächerelemente treten in folgenden Situationen Schwierigkeiten auf:

- *große Formparameter  $w$ s:*

Die Integrationspunkte konzentrieren sich sehr stark in der Nähe der inneren Kontrollpunkte. Dadurch besitzt der Integrand an den Grenzen ein sehr starkes Gefälle bzw. einen sehr starken Anstieg.

- *Vorzeichenwechsel in den Hauptkrümmungen:*

Da über das Vorzeichen des plastischen Moments indirekt der Absolutbetrag der Krümmung integriert wird, tritt an solchen Stellen ein Knick in der zu integrierenden Funktion auf, der von den meisten numerischen Integrationsverfahren nur schlecht abgebildet werden kann.

Integrationsalgorithmen werden nach verschiedenen Kriterien klassifiziert: iterative und nicht-iterative, adaptive und nicht-adaptive Algorithmen. Eine ausführliche Betrachtung ist in [10] zu finden.

Da für die Berechnung der Fächersegmente eine vorgegebene Mindestgenauigkeit zu erreichen ist, ist ein iterativer Algorithmus zu wählen, der solange Integrationspunkte hinzufügt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Die beschriebenen Problemfälle treten immer örtlich begrenzt auf. Durch einen adaptiven Algorithmus werden zusätzliche Stützstellen nur in den Bereichen eingefügt, in denen sie benötigt werden, so dass die Anzahl der zu berechnenden Stützstellen so gering wie möglich wird.

In dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programm *FLX* wurde deshalb ein global adaptiver Integrationsalgorithmus auf der Basis der Gauss-Kronrod-Integration gewählt. Zusätzlich wurden auch die Integrationsroutinen DTWODQ und DQAND aus der Fortran-Bibliothek IMSL<sup>1</sup> getestet.

Bei der Gauss-Kronrod-7-15-Regel wird das Integral über den zu untersuchenden Bereich mittels der bekannten sieben Gauss-Punkte approximiert. Für die Abschätzung des Fehlers der Integration wird das Integral mit 15 Kronrod-Punkten bestimmt. In diesen Kronrod-Punkten sind die Gauss-Punkte als Untermenge enthalten, so dass nicht alle Funktionswerte neu berechnet werden müssen. Der angenommene Fehler ergibt sich aus der Differenz der Ergebnisse beider Integrationsverfahren.

---

<sup>1</sup>International Mathematical and Statistical Library, Visual Numerics Inc, USA

Für eine ausführliche Beschreibung der Gauss-Kronrod-Integration siehe [13] und [51]. Im Anhang C sind die Gauss-Kronrod-Punkte mit den dazugehörigen Gewichten aufgelistet.

Das Vorgehen bei der Adaption erfolgt in Anlehnung an van Dooren und de Ridder [46]. Wenn die Summe der Fehler über alle Teilintervalle größer ist als der vorgegebene Grenzwert, wird das Teilintervall mit dem maximalen Fehler ausgewählt und weiter unterteilt. Van Dooren und de Ridder legen dar, dass es bei mehrdimensionalen Integralen nicht sinnvoll ist, das Intervall in allen Koordinatenrichtungen zu halbieren. Besser ist es, die Koordinatenrichtung auszuwählen, in der der zu erwartende Effekt am größten ist.

Durch eine eindimensionale Gauss-Kronrod-Fehlerermittlung entlang  $t_1$  und  $t_2$  wird der Fehler für jede der Richtungen getrennt berechnet. Das Intervall wird in der Koordinatenrichtung, in der der Fehler am größten ist, halbiert.

In Tabelle 11.1 wird die Qualität der beschriebenen Integrationsroutine dargestellt. Für zwei Beispiele ist die bei der Berechnung der inneren Arbeit erforderliche Anzahl von Stützstellen bis zum Erreichen der gewünschten Genauigkeit aufgelistet. Es wird die oben beschriebene Gauss-Kronrod-7-15-Regel mit der Gauss-Kronrod-20-41-Regel (20 Gauss-Punkte und 21 zusätzliche Punkte für die Fehlerschätzung) verglichen. Zusätzlich sind als Referenz die Ergebnisse mit den Integrationsroutinen der IMSL-Bibliothek aufgeführt. Als Zielwert war eine Genauigkeit von  $10^{-8}$  vorgegeben.

Beispiel	FLX – Gauss-Kronrod		IMSL	
	7-15-Regel	20-41-Regel	DTWODQ	DQAND
Eckfächer aus Beispiel 1 (Abschnitt 20.1) nach mehreren Optimierungsiterationen	0.4593937495 4275	0.4593937451 8405	0.4593937491 31905	0.4593937478 21844
Eckfächer aus Beispiel 1 (Abschnitt 20.1) im zufälligen Anfangszustand	2.7208623943 27675	2.7208623956 42025	2.7208623948 44175	Fehler

Tabelle 11.1: Vergleich von verschiedenen Integrationsverfahren. Der obere Wert ist jeweils das Ergebnis des Integrals, der untere Wert gibt die Anzahl der Stützstellen an.

Beim Beispiel 1 (Abschnitt 20.1) handelt es sich um eine allseitig eingespannte Quadratplatte mit konstanter Flächenlast. Besonders kritisch ist der Fehler in der IMSL-Routine DQAND. Wird dabei die gewünschte Genauigkeit nicht erreicht, ist ein Programmabsturz während der Berechnung die Folge. Dadurch erweist sich diese Routine als praktisch nicht nutzbar.

Der im Programm *FLX* verwendete Integrationsalgorithmus kommt bei gleicher Genauigkeit mit wesentlich weniger Stützstellen aus als die IMSL-Routinen. Beim



Vergleich mit höherwertigen Gauss-Kronrod-Regeln zeigt sich, dass für die Integration der Fächersegmente die 7-15-Regel am besten geeignet ist.

Abbildung 11.7 zeigt einen Zwischenzustand während der Optimierung für das Beispiel 1. Fächer 13 weist in der Nähe der Punkte  $P_3$  und  $P_4$  einen Wechsel im Vorzeichen der Hauptkrümmungsrichtung auf.

In der Verteilung der Stützstellen für den Fächer 13 (Abbildung 11.8) ist die Konzentration der Stützstellen in den Bereichen, in denen eine Hauptkrümmungsrichtung ihr Vorzeichen ändert, deutlich zu erkennen. Für diesen Fächer wurden 32176 Stützstellen berechnet. Die Darstellung der Stützstellen in Abbildung 11.8 erfolgt in den  $t_1, t_2$ -Koordinaten des Fächers.

Zum Vergleich waren für Fächer 13 im ausiterierten Zustand (ohne Vorzeichenwechsel in den Hauptkrümmungen) nur 256 Stützstellen erforderlich (Abbildung 11.9). Für beide Integrale war eine Genauigkeit von  $10^{-8}$  vorgegeben. Die Ausgabe des Programms *FLX* wird im Anhang A.1.3 beschrieben.

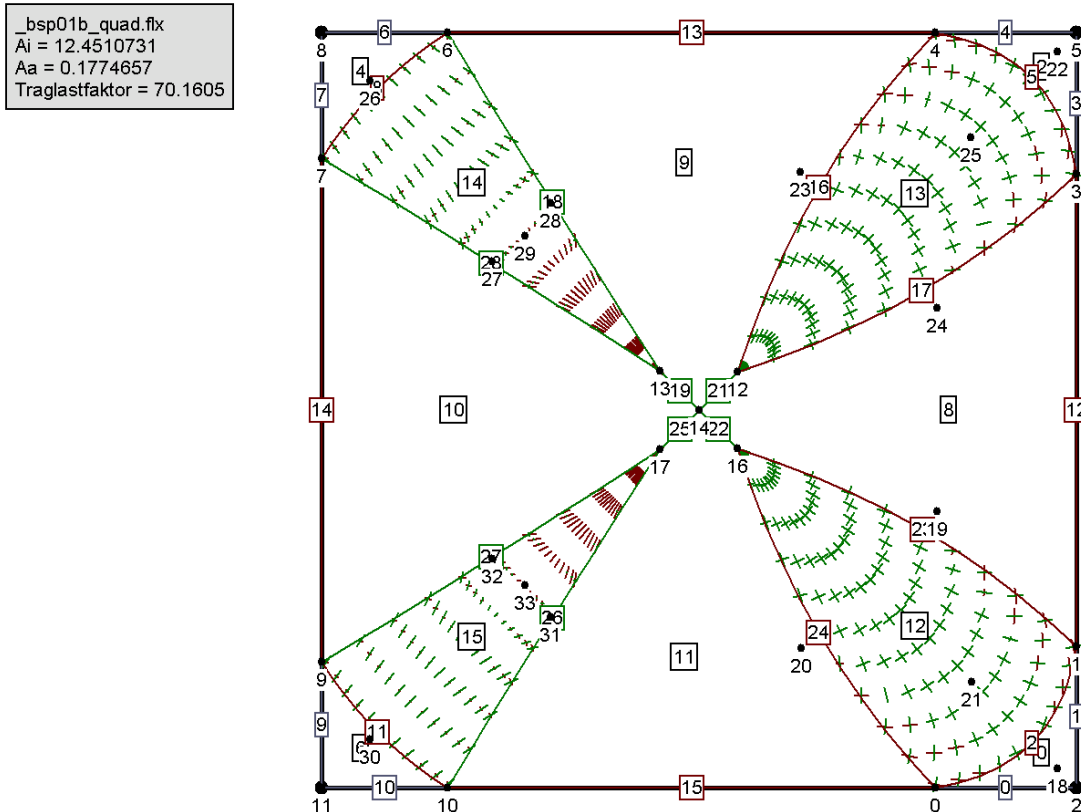


Abbildung 11.7: Quadratplatte aus Beispiel 1 (Zwischenzustand)

Der Hauptgrund für die Implementation einer eigenen Integrationsfunktion ist jedoch die im Laufe der Optimierung erforderliche Ableitung der Zielfunktion (der Traglast) nach den Optimierungsparametern. Die Bestimmung der Ableitungen ist

Fächersegment 13  
 $A_i = 2.059753$   
 Stützstellen = 16200 / 32176

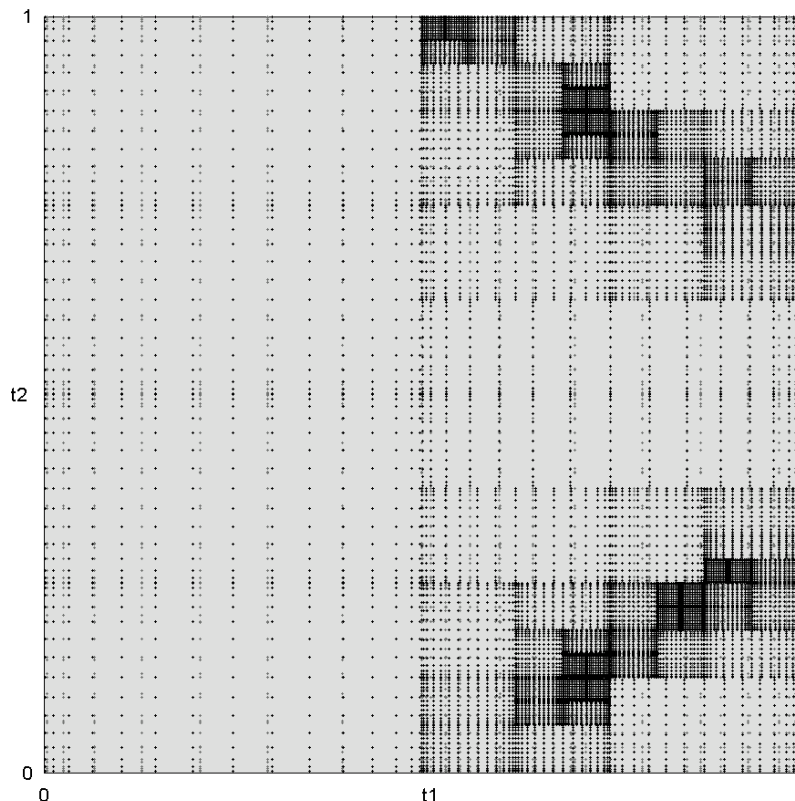


Abbildung 11.8: Stützstellen bei der numerischen Integration der inneren Arbeit des Fächersegments 13 im Beispiel 1 im Zwischenzustand

ohnein schon sehr rechenintensiv. Um ein unnötiges Mehrfachberechnen derselben Zwischenwerte zu vermeiden, empfiehlt es sich, alle Ableitungen gleichzeitig zu berechnen und auch gleichzeitig aufzuintegrieren. Eine solche gleichzeitige Integration mehrerer Funktionen wird von kommerziellen Softwarepaketen nicht unterstützt.

Die Gauss-Kronrod-Routine im Programm *FLX* wurde so erweitert, dass bei Bedarf die Ableitungen einer Funktion gemeinsam mit der Funktion integriert werden können. Dabei wird so vorgegangen, dass die zu berechnenden Ableitungen vorerst ignoriert werden. Es wird zuerst nur das Integral der Zielgröße, d.h. der äußeren bzw. inneren Arbeit, berechnet. Der Integrationsbereich wird solange unterteilt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Die so entstandene Intervallteilung wird dann auch für die Integration der Ableitungen benutzt. Auf diese Weise ist die rechenintensive Bestimmung der Ableitungen nur an den Stützstellen erforderlich, an denen die Werte für die numerische Integration auch benötigt werden. Unnötige Rechenoperationen werden vermieden und der Rechenaufwand wird auf das erforderliche Mindestmaß beschränkt.

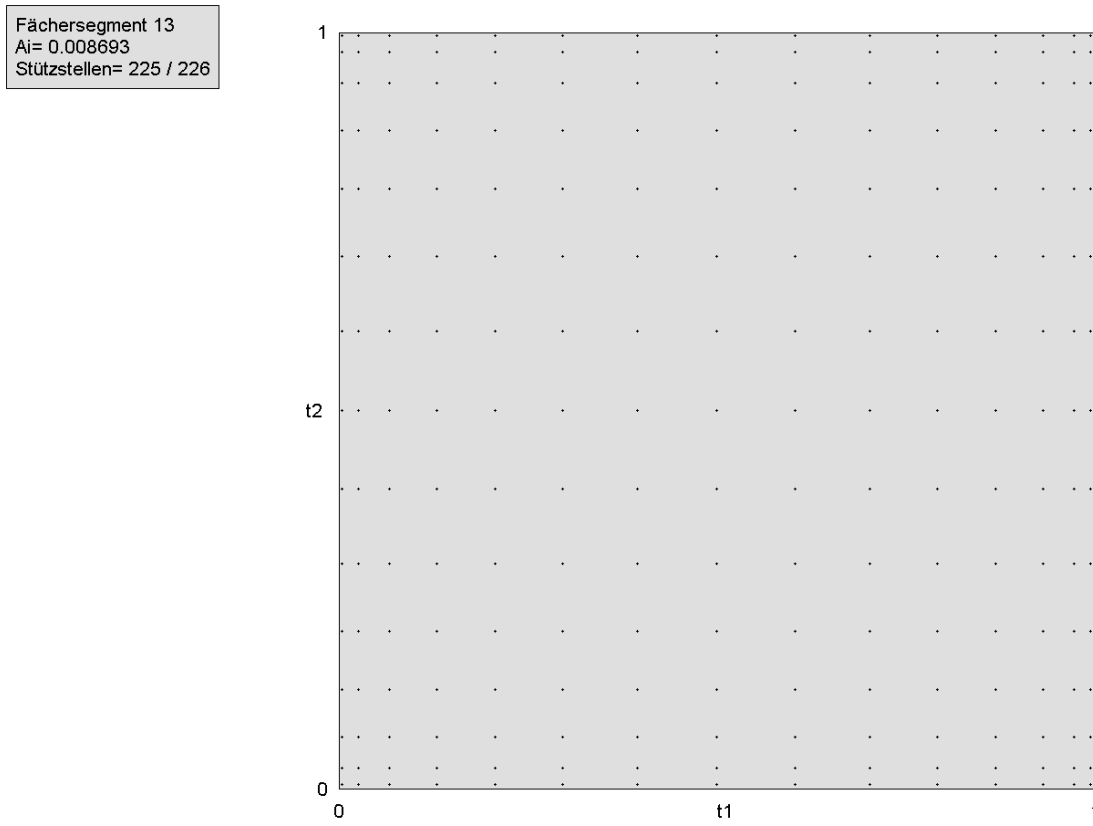


Abbildung 11.9: Stützstellen bei der numerischen Integration der inneren Arbeit des Fächersegments 13 im Beispiel 1 im ausiterierten Zustand

Durch die Kombination einer sehr schnellen Integrationsregel einerseits und der Möglichkeit der simultanen Integration der zu integrierenden Funktionen und ihrer Ableitungen andererseits erhält man einen sehr effizienten Algorithmus für die Berechnung der inneren und der äußeren Arbeiten sowie deren Ableitungen.



## 12 Grundlagen zur Spline-Berechnung

In diesem Kapitel werden einige Sub-Algorithmen beschrieben, die bei der Implementation der Fließlinienberechnung mit den in dieser Arbeit entwickelten Fächersegmenten erforderlich sind.

### 12.1 Quadratische Gleichungssysteme

Gesucht sind alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) &= 0 \\ \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 b_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) &= 0 \end{aligned} \tag{12.1}$$

im Bereich  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ . Alle nachfolgend diskutierten Probleme lassen sich auf dieses Gleichungssystem zurückführen. Ein Lösungsversuch durch Umstellen und Einsetzen führt jedoch zu einer Gleichung achten Grades. Diese Gleichung ist sehr lang und lässt sich nur für konkrete Spezialfälle vereinfachen. An dieser Stelle soll daher auf eine Darstellung des ausmultiplizierten Gleichungssystems verzichtet werden.

Aufgrund der speziellen Form der Bézier-Splines können jedoch vorab einige Aussagen über die Lösbarkeit des Gleichungssystems getroffen werden.

Eine Funktion der Form

$$\begin{bmatrix} f_a(t_1, t_2) \\ f_b(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) \\ \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 b_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

stellt einen quadratischen Spline mit den Kontrollpunkten  $(a_{i,j}, b_{i,j})$  dar. Für  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  bewegen sich die Funktionswerte innerhalb der konvexen Hülle bzw. des umhüllenden Rechtecks dieser Kontrollpunkte.

Es kann folglich nur dann Lösungen in  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  geben, wenn in den Koeffizienten  $a_{i,j}$  und den  $b_{i,j}$  unterschiedliche Vorzeichen auftreten. Zusätzlich sind Lösungen auf dem Rand des Definitionsbereichs möglich. In diesem Fall müssen keine wechselnden Vorzeichen auftreten, das Minimum oder das Maximum der  $a_{i,j}$  bzw. der  $b_{i,j}$  muss in diesem Fall Null sein.

## 12.2 Schnittpunkt Strecke – Splinekurve

Gegeben ist in der  $xy$ -Ebene eine Splinekurve mit den Kontrollpunkten  $P_0$ ,  $P_1$  und  $P_2$ , sowie eine Strecke mit den Kontrollpunkten  $P_3$  und  $P_4$  (Abbildung 12.1). Gesucht sind die Schnittpunkte der Strecke mit dem Spline. Je nach verwendetem Optimierungsalgorithmus können in den Zwischenzuständen stark verzerrte Fließlinienmuster auftreten. Dieser Algorithmus wird benötigt, um zwei Fließlinien aus Schnittpunkten zu überprüfen, und so festzustellen, ob das Fließlinienmuster gültig ist.

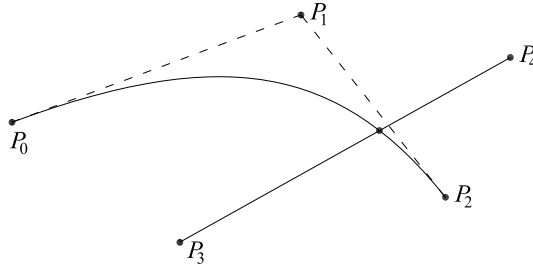


Abbildung 12.1: Schnittpunkt Strecke – Splinekurve

$$P_{Spline}(t_1) = \frac{P_0 B_0^2(t_1) + w s P_1 B_1^2(t_1) + P_2 B_2^2(t_1)}{B_0^2(t_1) + w s B_1^2(t_1) + B_2^2(t_1)} \quad (12.3)$$

$$P_{Strecke}(t_2) = P_3(1 - t_2) + P_4 t_2$$

Der Spline repräsentiert einen Kegelschnitt. Ein Kegelschnitt kann mit einer Geraden maximal zwei Schnittpunkte haben. Damit es sich um einen echten Schnittpunkt im Inneren der beiden Kurven handelt, muss  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  gelten. Aus 12.3 erhält man eine quadratische Gleichung in  $t_1$ :

$$\begin{aligned} 0 = & ((x_0 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_0 - y_3)(x_4 - x_3)) B_0^2(t_1) + \\ & ((x_1 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_4 - x_3)) w s B_1^2(t_1) + \\ & ((x_2 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_3)(x_4 - x_3)) B_2^2(t_1) \end{aligned} \quad (12.4)$$

Wenn Lösungen für  $t_1$  im Bereich  $0 \leq t_1 \leq 1$  existieren, so kann man anschließend  $t_2$  bestimmen:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{x_4 - x_3} \left( \frac{x_0 B_0^2(t_1) + w s x_1 B_1^2(t_1) + x_2 B_2^2(t_1)}{B_0^2(t_1) + w s B_1^2(t_1) + B_2^2(t_1)} - x_3 \right) \\ &= \frac{1}{y_4 - y_3} \left( \frac{y_0 B_0^2(t_1) + w s y_1 B_1^2(t_1) + y_2 B_2^2(t_1)}{B_0^2(t_1) + w s B_1^2(t_1) + B_2^2(t_1)} - y_3 \right) \end{aligned} \quad (12.5)$$

Wenn auch  $0 \leq t_2 \leq 1$  ist, so handelt es sich um einen echten Schnittpunkt beider Kurven.

## 12.3 Schnittpunkt Splinekurve – Splinekurve

Auch diese Routine ist beim Überprüfen der Gültigkeit eines Fließlinienmusters erforderlich. Gegeben sind in der  $xy$ -Ebene zwei Splinekurven mit den Kontrollpunkten  $P_0, P_1$  und  $P_2$  bzw.  $P_3, P_4$  und  $P_5$  (Abbildung 12.2).

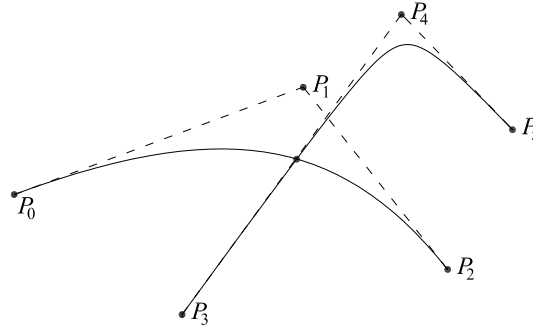


Abbildung 12.2: Schnittpunkt Splinekurve– Splinekurve

$$\begin{aligned}
 P_{Spline1}(t_1) &= \frac{P_0 B_0^2(t_1) + w s_1 P_1 B_1^2(t_1) + P_2 B_2^2(t_1)}{B_0^2(t_1) + w s_1 B_1^2(t_1) + B_2^2(t_1)} \\
 P_{Spline2}(t_2) &= \frac{P_3 B_0^2(t_2) + w s_2 P_4 B_1^2(t_2) + P_5 B_2^2(t_2)}{B_0^2(t_2) + w s_2 B_1^2(t_2) + B_2^2(t_2)}
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

Gesucht sind die Schnittpunkte der beiden Splinekurven. Zwei Kegelschnitte können in der Ebene maximal vier Schnittpunkte haben. Damit es sich um einen echten Schnittpunkt im Inneren der beiden Splinekurven handelt, muss auch hier  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  gelten. Auch unter dieser Einschränkung sind bis zu vier Schnittpunkte möglich.

### 1. Schritt: Prüfen der konvexen Hülle.

Die konvexen Hüllen der beiden Splines sind die Dreiecke  $P_0 P_1 P_2$  und  $P_3 P_4 P_5$ . Wenn es Schnittpunkte zwischen Dreiecksseiten gibt, oder eines der Dreiecke komplett im Inneren des anderen liegt, können Schnittpunkte zwischen den beiden Splines auftreten.

Wenn dem nicht so ist, sind die konvexen Hüllen beider Kontrollpunkt-Tripel disjunkt und es kann keinen Schnittpunkt zwischen den beiden Splines geben. Die Untersuchung ist in diesem Fall beendet.

**2. Schritt:** Umstellen.

Gleichsetzen und Umstellen von Gleichung 12.6 liefert eine Gleichung der Spline-Form (Gleichung 12.1) mit den Koeffizientenmatrizen

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} x_0 - x_3 & ws_2(x_0 - x_4) & x_0 - x_5 \\ ws_1(x_1 - x_3) & ws_1ws_2(x_1 - x_4) & ws_1(x_1 - x_5) \\ x_2 - x_3 & ws_2(x_2 - x_4) & x_2 - x_5 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} y_0 - y_3 & ws_2(y_0 - y_4) & y_0 - y_5 \\ ws_1(y_1 - y_3) & ws_1ws_2(y_1 - y_4) & ws_1(y_1 - y_5) \\ y_2 - y_3 & ws_2(y_2 - y_4) & y_2 - y_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.7)$$

Die Determinanten dieser Matrizen sind Null. Die resultierende Gleichung achten Grades besitzt vier Scheinlösungen, die sich jedoch leicht erkennen und eliminieren lassen. Es verbleibt eine zu lösende Gleichung vierten Grades:

$$A02(t_2)^2 - A01(t_2)A12(t_2) = 0 \quad (12.8)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A02(t_2) &= N_t(x_2y_0 - x_0y_2) - x_t(y_0 - y_2) + y_t(x_0 - x_2) \\ A01(t_2) &= 2ws_1(N_t(x_0y_1 - x_1y_0) - x_t(y_1 - y_0) + y_t(x_1 - x_0)) \\ A12(t_2) &= 2ws_1(N_t(x_1y_2 - x_2y_1) - x_t(y_2 - y_1) + y_t(x_2 - x_1)) \end{aligned} \quad (12.9)$$

und

$$\begin{aligned} x_t &= x_3B_0^2(t_2) + ws_2x_4B_1^2(t_2) + x_5B_2^2(t_2) \\ y_t &= y_3B_0^2(t_2) + ws_2y_4B_1^2(t_2) + y_5B_2^2(t_2) \\ N_t &= B_0^2(t_2) + ws_2B_1^2(t_2) + B_2^2(t_2) \end{aligned} \quad (12.10)$$

Anschließend errechnet man  $t_1$  zu

$$t_1 = \frac{A02(t_2) + A01(t_2)}{2A02(t_2) + A01(t_2) + A12(t_2)} \quad (12.11)$$

Da die Anzahl der Nullstellen von Gleichung 12.8 im Bereich  $0 \leq t_2 \leq 1$  von null bis vier variieren kann, empfiehlt es sich, diese Zahl vorab mittels Sturm-Test zu bestimmen, und anschließend gezielt nach den Nullstellen zu suchen.

## 12.4 Spline-Abschnitt

Die nachfolgenden Gleichungen werden zur Untersuchung von Platten mit gekrümmten Rändern benötigt. Gegeben ist in der  $xy$ -Ebene eine Splinekurve mit den Kontrollpunkten  $P_0$ ,  $P_1$  und  $P_2$ :

$$P(t) = \frac{P_0B_0^2(t) + wsP_1B_1^2(t) + P_2B_2^2(t)}{B_0^2(t) + wsB_1^2(t) + B_2^2(t)} \quad (12.12)$$



Gesucht ist eine Spline-Darstellung des Abschnitts der gegebenen Spline-Kurve, der durch die Parameter  $t_1$  und  $t_2$  begrenzt wird, wobei  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$  gelten soll.

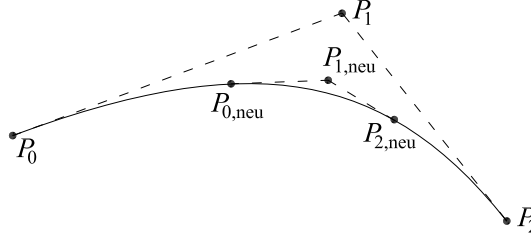


Abbildung 12.3: Spline-Abschnitt

Die Kontrollpunkte des neuen Splines erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{0,\text{neu}} &= P(t_1) \\ P_{2,\text{neu}} &= P(t_2) \\ P_{1,\text{neu}} &= \text{Schnittpunkt der Tangenten in } P(t_1) \text{ und } P(t_2) \\ &= P(t_1) + \lambda_1 \dot{P}(t_1) = P(t_2) + \lambda_2 \dot{P}(t_2) \end{aligned} \quad (12.13)$$

Damit stimmen der Ort und die Tangente beider Splines in den Punkten  $P(t_1)$  und  $P(t_2)$  überein. Zusätzlich muss jedoch auch die Krümmung des Ausgangs-Splines und des Spline-Abschnitts in diesen Punkten übereinstimmen. Daraus lässt sich der Gewichtsparameter des Spline-Abschnitts berechnen:

$$ws_{\text{neu}} = \frac{1 + (t_1(1 - t_2) + (1 - t_1)t_2)(ws - 1)}{\sqrt{(1 + 2t_1(1 - t_1)(ws - 1))(1 + 2t_2(1 - t_2)(ws - 1))}} \quad (12.14)$$

## 12.5 Abstand Punkt – Spline

In dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Rechenprogramm  $\mathcal{FLX}$  gibt es die Möglichkeit, eine Einzellast einer Fließlinie zuzuweisen, wenn der Abstand kleiner als ein bestimmter Grenzwert ist. Liegt die Einzellast im ausoptimierten Zustand auf dieser Fließlinie, kann dies das Konvergenzverhalten bei der Optimierung verbessern.

Gesucht ist dabei der minimale Abstand eines Punktes von einer Splinekurve. Als Abstand  $d$  eines Punktes  $P_0$  von einem Spline wird der minimale Abstand zwischen  $P_0$  und allen Punkten des Splines  $P(t)$  definiert mit  $0 \leq t \leq 1$ .

$$d_0^2 = \min_{0 \leq t \leq 1} (x(t)^2 + y(t)^2) \quad (12.15)$$

Am Punkt des minimalen Abstandes muss der Richtungsvektor des Splines und der Vektor vom Punkt  $P_0$  zum Punkt auf dem Spline senkrecht aufeinander stehen. Aus dem Skalarprodukt der orthogonalen Vektoren folgt die Bedingung

$$(x(t) - x_{P_0})\dot{x}(t) + (y(t) - y_{P_0})\dot{y}(t) = 0 \quad (12.16)$$

Diese Gleichung liefert nach dem Nullsetzen und Vereinfachen eine Gleichung vierten Grades, die im reellen Bereich bis auch zu vier Lösungen haben kann. Vier reelle Lösungen, zwei Maxima und zwei Minima des Abstandes, können beispielsweise bei einer Ellipse oder einer Hyperbel auftreten, wenn sich der Punkt  $P_0$  im Inneren der Ellipse bzw. der Hyperbel befindet. Bei Beschränkung auf das Intervall  $0 \leq t \leq 1$  können immer noch bis zu drei Extremstellen gefunden werden.

Die Gleichung besitzt bis auf die Cardanischen Formeln keine einfache Lösung. Zweckmäßigerweise sollte die Lösung numerisch bestimmt werden. Neben den aus Gleichung 12.16 bestimmten Extrempunkten des Abstandes sind auch die Abstände zu den Endpunkten  $t = 0$  und  $t = 1$  zu berücksichtigen.

## 12.6 Punkt auf Fächer

Zu einem Fächersegment ist festzustellen, ob ein Punkt (zum Beispiel eine Einzellast) im Inneren des Fächers liegen. Gegeben ist ein Spline-Fächer in der Form

$$P(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} P_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)} \quad (12.17)$$

sowie ein Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x_P, y_P$ .

Gesucht sind die Spline-Parameter  $t_1$  und  $t_2$  des Punktes  $P$ .

Für einen Fließlinienfächer in einem gültigen Fließlinienmuster gibt es zu jedem Punkt im Inneren der Spline-Fläche genau ein Parameterpaar  $t_1, t_2$  in den Flächenkoordinaten mit  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ . Wenn es also eine Lösung des Problems gibt, so ist diese eindeutig.

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} x_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)} \\ y_P &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} y_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} B_i^2(t_1) B_j^2(t_2)} \end{aligned} \quad (12.18)$$

und umgeformt in die Form von Gleichung 12.2:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} (x_{i,j} - x_P) B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) &= 0 \\ \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w s_{i,j} (y_{i,j} - y_P) B_i^2(t_1) B_j^2(t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (12.19)$$

Da die Gewichtsparameter  $w s$  stets positiv sind und auch die Bernsteinpolynome im Bereich  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  nie negativ werden, kann dieses Gleichungssystem nur dann eine Lösung besitzen, wenn in den Termen  $x_{i,j} - x_P$  und  $y_{i,j} - y_P$  unterschiedliche Vorzeichen auftreten. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass sich der Lastangriffspunkt im Inneren des umhüllenden Rechtecks (parallel zu den Koordinatenachsen) befinden muss:

$$\begin{aligned} \min_{i,j} (x_{i,j}) &\leq x_P \leq \max_{i,j} (x_{i,j}) \\ \min_{i,j} (y_{i,j}) &\leq y_P \leq \max_{i,j} (y_{i,j}) \end{aligned} \quad (12.20)$$

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so befindet sich der Punkt  $P$  definitiv nicht im Inneren des Fächers. Umgekehrt folgt jedoch aus der Erfüllung der Ungleichung 12.20 noch nicht, dass sich der Punkt immer im Fächerinneren befindet.

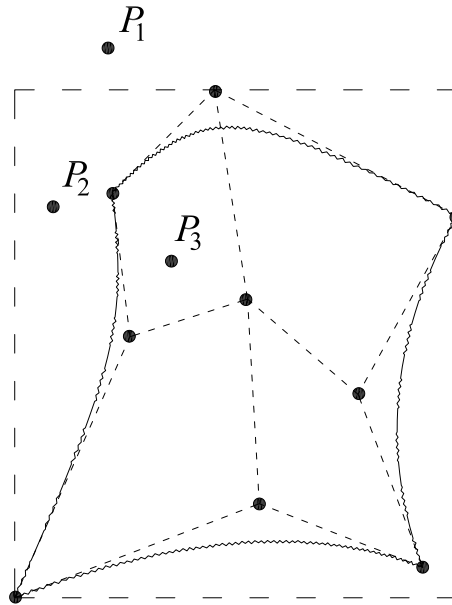


Abbildung 12.4: Beispiel für die Lage der Punkte relativ zum Fächer

In Abbildung 12.4 liegt Punkt  $P_1$  außerhalb des Rechtecks und somit außerhalb des Fächers.  $P_2$  ist zwar innerhalb des umhüllenden Rechtecks, aber außerhalb des Fächers. Nur für  $P_3$  lassen sich  $t_1$  und  $t_2$  mit  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  finden.

Um sicherzustellen, dass eine Lösung für das Gleichungssystem existiert, wird im Programm *FLX* zusätzlich untersucht, ob sich der Punkt im Inneren des Umrisspolygons des Fächers befindet. Damit sind Fälle wie Punkt  $P_2$  in Abbildung 12.4 ausgeschlossen.

# Teil III

## Anwendung



## 13 Problemdarstellung

Dieser Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Anwendung der zuvor beschriebenen Objekte in einem Modell zur Berechnung der Plattentraglast auf der Grundlage eines Fließlinienmusters.

Der kinematische Grenzwertsatz der Traglasttheorie, der der Fließlinientheorie zu Grunde liegt, liefert stets eine obere Schranke für die Traglast der Platte. Wenn die virtuelle Verschiebungsfigur eines Fließlinienmusters von der wirklichen Versagensform des Plattentragwerks abweicht, wird die Werkstoffbedingung  $m \leq m_u$  in der Platte verletzt. Je stärker sich die virtuelle Verschiebungsfigur und die gesuchte Versagensform unterscheiden, um so mehr wird die Traglast überschätzt. Deshalb ist es wichtig, das Fließlinienmuster so genau wie möglich zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke wählt man ein geeignetes Anfangsfließlinienmuster und berechnet daraus die dazugehörige Versagenslast. Anschließend wird der Verlauf der Fließlinien so verändert, dass die errechnete Versagenslast minimiert wird.

Eine automatisierte Traglastberechnung nach der Fließlinientheorie ist folglich ein numerisches Optimierungsproblem. Das Fließlinienmuster muss durch eine Reihe von Parametern beschrieben werden. Die gängigen Methoden der numerischen Optimierung können dann auf diese Parameter angewandt werden, um die Versagenslast zu minimieren.

Die Versagensform (somit das maßgebende Fließlinienmuster) einer Platte ist jedoch nicht nur von der Plattengeometrie abhängig, sondern auch vom verwendeten Werkstoff und von der Art und Verteilung der Belastung. Eine einachsig bewehrte Stahlbetonplatte wird unter derselben Last bei denselben Randbedingungen ein anderes Fließlinienmuster aufweisen als eine isotrope Stahlplatte. Eine Einzellast wird ein anderes Fließlinienmuster erzeugen als eine gleichmäßig verteilte Flächenlast.

Um einen Eindruck von der Vielfalt der Fließlinienmuster zu erhalten und das erforderliche Know-How des Programms zu verdeutlichen, werden an dieser Stelle anhand von Beispielen die Entscheidungen verdeutlicht, die das Programm zu treffen hat.

### Fließlinien am Rand

Abbildung 13.1 zeigt eine Trapezplatte, die auf drei Seiten eingespannt und auf einer Seite frei ist.

Je nach Abmessung der Platte und Materialbeschaffenheit wird sich die Fließlinie des kurzen Randes entweder direkt am Rand (linkes Bild) oder im Platteninneren (rechtes Bild) ausbilden.

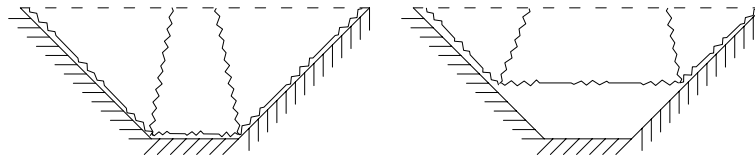


Abbildung 13.1: Trapezförmige Platte

Insbesondere für gelenkig gelagerte Ränder bzw. Ränder mit einem abgeminderten plastischen Moment ist diese Entscheidung von Bedeutung, da in diesen Fällen der Betrag des plastischen Grenzmoments der fraglichen Fließlinie beider Fälle unterschiedlich ist.

Um entscheiden zu können, welcher dieser beiden Fälle zur kleineren Traglast führt, sind durch das Programm beide Fälle zu testen, wie es auch bei einer Handrechnung erforderlich wäre.

### Freie Ränder

Bei ungestützten Rändern ist zu prüfen, ob eine Fließlinie den Rand schneidet. Typische Fälle sind Ränder mit Randsteife bzw. Randunterzug (Abbildung 13.2) oder weit von der Last entfernte Ränder (Abbildung 13.3). Das Programm muss jeweils prüfen, ob der Rand erhalten bleibt oder durch eine Fließlinie geschnitten wird. Auch hier ist es erforderlich, dass jeweils beide Versagensmechanismen getestet und ausgewertet werden, um das Minimum der Traglast zu finden.

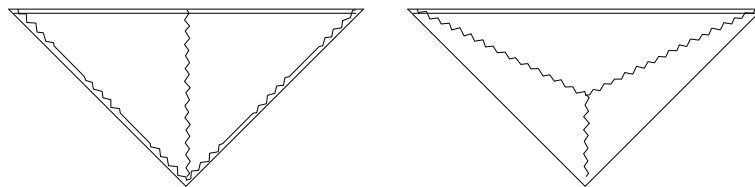


Abbildung 13.2: Dreieckplatte mit Randunterzug

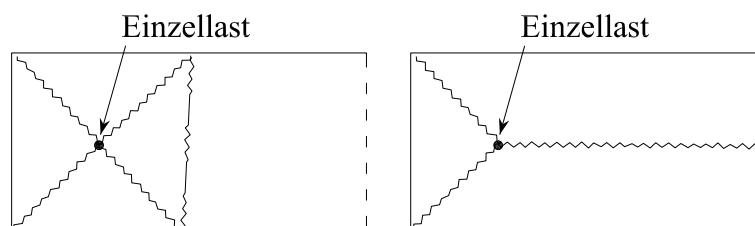


Abbildung 13.3: Rechteckplatte mit Einzellast

### Fächerform

In Abbildung 13.4 wird eine an zwei Seiten eingespannte Dreiecksplatte untersucht.



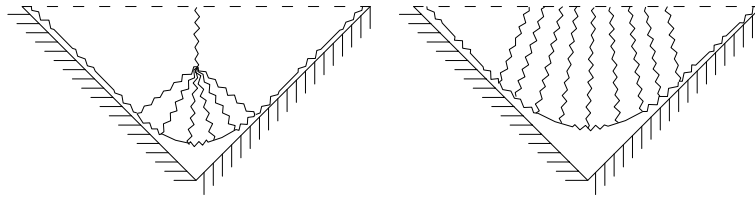


Abbildung 13.4: Dreieckplatte mit Fließlinienfächern

Je nach Material kann sich in der Ecke zwischen den eingespannten Rändern ein Fließlinienfächer ausbilden oder auch nicht. Das Programm muss untersuchen, ob hier eine Versagensform mit Fächer auftreten wird. Wenn ein Fließlinienfächer entsteht, gibt es dafür prinzipiell die zwei in der Abbildung 13.4 dargestellten möglichen Lösungen.

Fächer sind durch die vorgegebenen Kontrollpunkte definiert und können ihre Topologie nicht ändern. Daher stellen die in Abbildung 13.4 dargestellten Geometrien zwei völlig unterschiedliche Systeme dar. Es ist nicht möglich, eine Parameterdarstellung anzugeben, welche beide Fälle gleichzeitig abdeckt. Daher muss das Programm vorab prüfen, welcher Fall auftreten wird und dann ein entsprechendes Fächersystem erzeugen.

Zu diesem Zweck wird der Fächer zunächst durch ein ebenes Plattensegment ersetzt. Die beiden Fließlinienmuster in Abbildung 13.5 unterscheiden sich nur durch die virtuellen Verdrehungen der Plattensegmente. Sie ergeben sich somit aus derselben Parameterdarstellung.

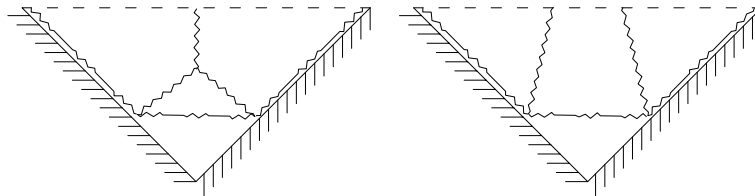


Abbildung 13.5: Eckplatte mit ebenen Plattensegmenten

### Schlussfolgerung

Das maßgebende Fließlinienmuster muss sich nicht zwangsweise über die gesamte Platte erstrecken. Insbesondere dann, wenn die Platte aus mehreren Bereichen mit einem sehr unterschiedlichen plastischen Moment besteht, wird nur einer der Plattenbereiche versagen.

Daher werden in einer ersten Berechnungsphase nur die einzelnen Plattenbereiche untersucht, wie sie vom Benutzer spezifiziert wurden. Die Platte ist dabei in Bereiche mit einheitlichem Werkstoff und konstanter Flächenlast zu unterteilen. In einer zweiten Phase werden Fließlinienmuster untersucht, die sich über mehrere Platten-

bereiche erstrecken. Diese beiden ersten Berechnungsphasen laufen noch ohne die Verwendung von Fächersegmenten ab. Erst in Phase 3 werden dann einige der ebenen Plattensegmente durch Fächer ersetzt.

## 14 Überblick über den Berechnungsablauf

Die Berechnung läuft wie erklärt in drei Phasen ab. Ziel ist eine möglichst hohe Berechnungsgeschwindigkeit bei gleichzeitig maximaler Flexibilität.

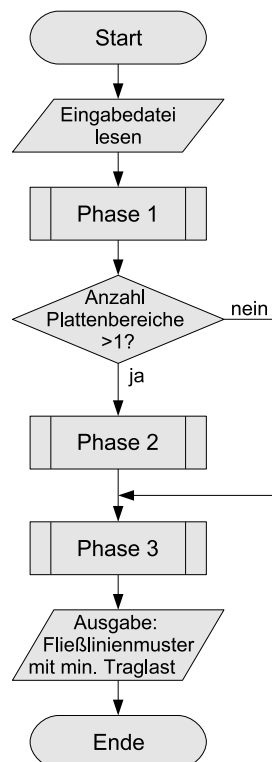


Abbildung 14.1: Flussdiagramm zum Auffinden des maßgebenden Fließlinienmusters

### Phase 1

In der ersten Phase werden die einzelnen Plattenbereiche untersucht, wie sie vom Benutzer eingegeben werden. Die Plattenbereiche können beispielsweise aufgrund der Belastung oder durch unterschiedliches Material definiert sein.

Für jeden gestützten Plattenrand (egal ob gelenkig gelagert oder eingespannt) sind zwei Fälle zu untersuchen. Entweder verläuft die zugehörige Fließlinie am Plattenrand oder im Inneren der Platte. Beim ersten Fall ist für diese Fließlinie eine gelenkige Lagerung bzw. ein abgemindertes Randmoment zu berücksichtigen. Bei der Fließlinie im Platteninneren entspricht das plastische Moment der Fließlinie dem des untersuchten Plattenbereichs.

Für nicht gestützte Ränder und Ränder mit Unterzug sind ebenfalls die beiden Fälle wie für die gestützten Ränder zu untersuchen. Dies ist erforderlich, da es durchaus möglich ist, dass die virtuelle Verschiebung am freien Rand Null ist (siehe Beispiele im Kapitel 13). Zusätzlich ist auch der Fall zu untersuchen, dass es Fließlinien gibt, die durch diesen Rand verlaufen, wodurch die virtuelle Vertikalverschiebung an diesem Rand ungleich Null ist.

Daraus ergeben sich eine große Anzahl von zu untersuchenden Fließlinienmustern. Aus Performancegründen und wegen der zu geringen Flexibilität werden in der ersten Phase noch keine Fächersegmente verwendet. An den Stellen, an denen sich Fächer ausbilden, werden vorerst ein oder mehrere ebene Plattensegmente eingesetzt. Je nach Größe und Lage dieser ebenen Segmente läßt sich dann die Form des Fächers angeben. Für Plattenecken zwischen zwei gestützten Rändern wird auch entschieden, ob überhaupt ein Fächer auftritt, oder ob in der Plattenecke ein Fließlinienmuster ohne Fächer entsteht.

### Phase 2

In der zweiten Phase werden Fließlinienmuster untersucht, die sich über mehrere der Plattenbereiche erstrecken. Die Informationen aus den Ergebnissen der ersten Phase werden für die Berechnung der Phase 2 verwendet. Für die Plattenränder müssen nicht mehr verschiedene Fälle getestet werden, da aus Phase 1 bereits bekannt ist, ob sich die Fließlinie am Rand oder im Platteninneren ausbildet. Ebenso kann die Information aus der Phase 1 über das Vorhandensein von Eckfächern genutzt werden.

Auch in der zweiten Phase werden noch keine Fächersegmente verwendet.

### Phase 3

In der dritten und letzten Phase werden Fächersegmente in das Fließlinienmuster eingesetzt. Nach der Optimierung erhält man so das endgültige Fließlinienmuster mit der dazugehörigen Traglast.

Dazu werden die Ergebnisse aus Phase 1 und Phase 2 weiterverarbeitet. In den ersten beiden Phasen wurden ebene Plattensegmente an den Stellen verwendet, an denen Fließlinienfächer zu erwarten wären. Diese ebenen Plattensegmente wurden als *Fächerersatz* markiert (siehe Abschnitt 16) und werden in Phase 3 durch ein Fächersegment mit der entsprechenden Geometrie (siehe Abschnitt 18) ersetzt.

Da sich die Berücksichtigung der Fächersegmente unterschiedlich stark auf die Traglast auswirkt, genügt es nicht, nur das beste Ergebnis der beiden ersten Phasen zu untersuchen. Andererseits ist es auch nicht erforderlich, alle bisherigen Ergebnisse weiter zu verfolgen. Zur Einsparung von Rechenzeit werden in Phase 3 nur solche Plattenbereiche aus Phase 2 weiter untersucht, deren errechnete Traglast nicht über dem 1.5-fachen Wert der kleinsten Traglast aus Phase 2 liegt. Der Faktor 1.5 resultiert aus Erfahrungswerten bei der Berechnung von Beispielen während der Erstellung dieser Arbeit.

---

Bei keinem der gerechneten Beispiele wurde in Phase 3 nach Einfügen der Fächersegmente ein „Gewinn“ von mehr als 20% im Vergleich zu den Phasen 1 und 2 erzielt. Dies bedeutet, dass die errechnete Traglast am Ende von Phase 3 in keinem untersuchten Fall kleiner war als 80% der Traglast am Ende von Phase 1 und 2 (Abschnitt 20). Damit können Fließlinienmuster, deren zugehörige Traglastfaktoren größer sind als der 1.5-fache minimale berechnete Traglastfaktor nicht mehr maßgebend werden.



# 15 Datenstruktur

Bevor die Methoden zur Bestimmung der Fließlinienmuster beschrieben werden, sind geeignete Datenstrukturen zu entwickeln, um die Objekte eines Fließlinienmusters beschreiben zu können. Es sind Datenstrukturen für folgende Elemente zu definieren:

- punktförmige Objekte
  - Kontrollpunkte
- linienförmige Objekte
  - gerade Fließlinien
  - gekrümmte Fließlinien
- flächige Objekte
  - ebene Plattensegmente
  - Fächersegmente

Jedes Fließlinienmuster (wie beispielsweise jenes in Abbildung 15.1) wird durch diese Objekte beschrieben.

Das Beispiel zeigt eine an zwei Seiten eingespannte und an zwei Seiten gelenkig gelagerte Platte mit einem möglichen Fließlinienmuster. Das Fließlinienmuster könnte in dieser Form am Ende von Phase 3 als Ergebnis stehen. In diesem Beispiel sind alle Plattensegmente mit ungeraden Nummern eben, die Plattensegmente mit den geraden Nummern sind Fächersegmente.

Platteneckpunkte sind mit  $PE$  bezeichnet, Kontrollpunkte erhalten die Bezeichnung  $P$  und Kanten (Fließlinien) die Bezeichnung  $K$ . Fächer  $F$  und ebene Plattensegmente  $E$  werden fortlaufend nummeriert.

## Kontrollpunkte

Prinzipiell besitzt jeder Punkt die Koordinaten  $x$  und  $y$ . Zusätzlich weist jeder Kontrollpunkt eine virtuelle Verschiebung  $\delta w$  auf. Für die Verwendung mit den Fächersegmenten können die Kontrollpunkte darüber hinaus noch einen Formparameter  $ws$  erhalten, der die Gewichtung des Punktes in den Fächern und den gekrümmten Linien angibt. Somit wird ein Kontrollpunkt durch bis zu vier Parameter beschrieben.

Je nach Lage bzw. Zwangsbedingung der Punkte werden diese nach verschiedenen Punkttypen klassifiziert. Der Punktyp eines Kontrollpunktes gibt an, auf welche Weise die Lage des Punktes bestimmt wird. Tabelle 15.1 listet alle erforderlichen Kontrollpunkttypen auf.

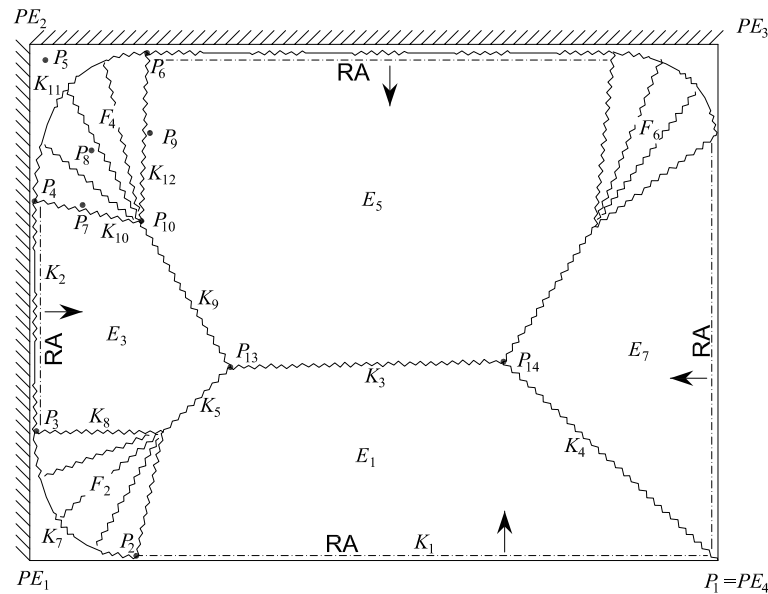


Abbildung 15.1: Beispiel eines Fließlinienmusters

Ein jeder Kontrollpunkt kann ein oder mehrere freie Parameter besitzen, die im Rahmen der numerischen Optimierung als Optimierungsparameter verändert werden können. In Tabelle 15.1 ist zu jedem Kontrollpunkttyp die Anzahl der freien Parameter für die Optimierung angegeben. Die Zahlen in den Klammern gelten dabei für Kontrollpunkte mit einem zusätzlichen Formparameter *ws*.

Typ	Anz. Par.	Beschreibung	Bsp. Abb. 15.1
kp0	0	<b>Plattengeometrie - fix</b> Punkte in Plattenecken, Punktstützungen usw. Die Punktkoordinaten $x$ und $y$ werden durch eine Geometriereferenz auf ein Element der Plattengeometrie festgelegt. Die vertikale virtuelle Verschiebung des Punktes ist Null.	$P_1$
kp1	1	<b>Plattengeometrie - verschieblich</b> Punkte in nicht gestützten Plattenecken. Definition wie Typ kp0, jedoch vertikal verschieblich. Die vertikale Verschiebung ist ein Optimierungsparameter.	-
kp2	1	<b>auf gestütztem Plattenrand</b> Der Punkt befindet sich auf einem gestützten Plattenrand. Die Koordinaten des Punktes ergeben sich aus den Endpunkten des Randes und dem Parameter $t$ : $P = (1 - t)PE_i + tPE_k$ . ( $0 \leq t \leq 1$ ) Der Parameter $t$ ist ein Optimierungsparameter.	$P_3$



Typ	Anz. Par.	Beschreibung	Bsp. Abb. 15.1
kp3	2 (3)	<b>auf nicht gestütztem Plattenrand</b> Definition wie Typ kp2, jedoch vertikal verschieblich. Die vertikale virtuelle Verschiebung ist ein weiterer Optimierungsparameter.	-
kp4	2 (3)	<b>Rand des Fließlinienmusters</b> Diese Punkte können sich beliebig auf der Platte bewegen, d.h. $x$ und $y$ werden als Optimierungsparameter im Rahmen der numerischen Optimierung bestimmt. Die virtuelle Vertikalverschiebung ist Null.	$P_5$
kp5	0	<b>auf drei Ebenen</b> Der Punkt befindet sich im Schnittpunkt von drei ebenen Plattensegmenten. Damit sind sowohl die $x$ - und die $y$ -Koordinate als auch die virtuelle Verschiebung bestimmt.	$P_{13}$
kp6	1	<b>auf Gerade zwischen zwei Plattensegmenten</b> Der Punkt befindet sich auf einer Kante (Gerade), die durch zwei ebene, benachbarte Plattensegmente bestimmt wird. Beispielsweise $P_{10}$ auf der Kante zwischen Plattensegment 3 und 5. Die Lage des Punktes berechnet sich aus einem Referenzpunkt und einem Richtungsvektor: $P = P_i + tv$ . Dabei ist der Optimierungsparameter $t$ nicht beschränkt. Einschränkungen für $t$ ergeben sich nur insofern, dass das Fließliniensystem gültig bleiben muss. Dieser Punkttyp tritt an der Spitze von Eckfächern auf.	$P_{10}$
kp7	2 (3)	<b>auf ebenem Plattensegment</b> Diese Punkte können sich beliebig bewegen. $x$ und $y$ sind Optimierungsparameter. Die virtuelle Vertikalverschiebung wird durch das Plattensegment bestimmt.	$P_7$
kp8	3 (4)	<b>frei</b> Der Punkt ist frei im Raum verschieblich. Sowohl $x$ und $y$ als auch die virtuelle Verschiebung $\delta w$ sind Optimierungsparameter.	$P_8$
kp9	0	<b>Plattengeometrie - auf ebenem Plattensegment</b> Die Punktkoordinaten $x$ und $y$ werden durch eine Geometriereferenz auf ein Element der Plattengeometrie festgelegt. Die vertikale virtuelle Verschiebung des Punktes ist durch ein ebenes Referenz-Plattensegment festgelegt.	-

Typ	Anz. Par.	Beschreibung	Bsp. Abb. 15.1
kp10	0	<b>Schnittpunkt zwischen Fließlinie und innerem Plattenrand</b> Dieser Punkttyp tritt bei Fließlinienmustern auf, die sich über mehrere Plattenbereiche erstrecken. Die Koordinaten des Punktes sind durch den Schnittpunkt einer Fließlinie mit der Grenze zwischen zwei Plattenbereichen festgelegt. Die virtuelle Verschiebung wird durch die Fließlinie bestimmt.	–
kp11	1(2)	<b>auf nicht gestütztem Plattenrand auf ebenem Plattensegment</b> Analog zu Typ kp2 befindet sich der Kontrollpunkt auf einem Plattenrand: $P = (1-t)PE_i + tPE_k$ . ( $0 \leq t \leq 1$ ) Die vertikale Verschiebung wird durch ein ebenes Plattensegment bestimmt.	–

Tabelle 15.1: Kontrollpunkt-Typen

Die in der letzten Spalte in Tabelle 15.1 angegebenen Punktnummern beziehen sich auf das Beispiel in Abbildung 15.1.

### Gerade Fließlinien

Die Datenstrukturen für gerade Fließlinien müssen folgende Daten enthalten:

- Nummer des Startpunktes
- Nummer des Endpunktes
- Nummer des Plattensegments rechts der Fließlinie
- Nummer des Plattensegments links der Fließlinie

Die Unterscheidung in Start- und Endpunkt ist notwendig, um eine Richtung für die Fließlinie festzulegen, so dass damit auch die Bezeichnungen rechts und links der Fließlinie definiert sind. Diese Unterscheidung der beiden angrenzenden Plattensegmente bezüglich ihrer Lage links bzw. rechts der Fließlinie ist erforderlich, um das Vorzeichen der Relativverdrehung bestimmen zu können.

### Gekrümmte Fließlinien

Die gekrümmte Fließlinie muss zusätzlich zu den Daten der geraden Fließlinie noch eine Zusatzinformation enthalten:

- Nummer des mittleren Kontrollpunktes (Scheitelpunkt)

Der Gewichtungsfaktor  $ws_1$  des Scheitelpunktes ist keine Eigenschaft der Fließlinie, sondern ist dem Kontrollpunkt zuzuordnen. Dies ist wichtig, da der Scheitelpunkt nicht

---

nur von der Fließlinie selbst sondern auch von den angrenzenden Fächersegmenten verwendet wird. Aus Kompatibilitätsgründen muss der Gewichtungsfaktor jeweils gleich sein, und kann nicht für die Fließlinie und die Fächer unabhängig gewählt werden.

### Ebene Plattensegmente

Für die Beschreibung der Lage der ebenen Plattensegmente in der virtuellen Verschiebungsfigur werden drei Möglichkeiten verwendet:

**2 Punkte** Die Ebene wird durch zwei Kontrollpunkte definiert. Zusätzlich dazu wird als Optimierungsparameter der Anstieg  $\delta\theta'$  der Ebene senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Referenzpunkte angesetzt. Der Anstieg  $\delta\theta'$  unterscheidet sich von der Verdrehung  $\delta\theta$  um die Rotationsachse, wenn die virtuelle Verschiebung der beiden Referenzpunkte unterschiedlich ist.

**1 Punkt** Die Position der Ebene ist durch einen Punkt sowie die beiden Neigungen  $\delta w_{,x}$  in  $x$ -Richtung und  $\delta w_{,y}$  in  $y$ -Richtung bestimmt. Die Werte  $\delta w_{,x}$  und  $\delta w_{,y}$  sind Parameter des Optimierungsproblems.

**Vertikal (Dummy)** Die Ebene wird durch zwei Kontrollpunkte definiert und steht senkrecht auf der  $xy$ -Ebene.

Mit diesen Angaben ist die Ebene festgelegt, in der sich das verformte Plattensegment befindet. Die Form des ebenen Plattensegments wird durch einen Polygonzug aus geraden und gekrümmten Fließlinien gebildet. Dieser Polygonzug beschreibt den Umriss des Plattensegments.

### Fächersegmente

Die Fächer werden durch Referenzen auf neun Kontrollpunkte definiert (siehe Abbildung 11.2). Damit ist sowohl die Lage als auch die Größe des Fächers eindeutig festgelegt. Für den Spezialfall des Dreiecksfächers wird von den drei Punkten eines Randes jeweils derselbe Kontrollpunkt referenziert.

Das Umrisspolygon eines Fächersegments ist zwar für die Beschreibung des Fächers nicht unbedingt erforderlich, jedoch vereinfachen sich die Berechnungen, wenn es beim Fächersegment mit gespeichert wird. Im allgemeinen Fall besteht das Umrisspolygon aus vier Fließlinien, im Spezialfall des Dreiecksfächers aus drei Fließlinien.

### Logische Gruppen

Für die Beschreibung des Fließlinienmusters werden die Plattensegmente, Fließlinien und Kontrollpunkte in logischen Gruppen zusammengefasst. Im Folgenden werden *Randgruppen* und *Eckgruppen* definiert. Randgruppen setzen sich aus Objekten zusammen, die einem Plattenrand zugeordnet werden. Die Objekte einer Eckgruppe stehen in Relation zu einer Plattenecke.

Im Beispiel aus Abbildung 15.1 besteht die Randgruppe am Rand  $PE_1 - PE_4$  aus dem ebenen Plattensegment  $E_1$  und der Kante  $K_1$ . Die Eckgruppe in der Plattenecke

$PE_2$  besteht aus den Kanten  $K_{10}$ ,  $K_{11}$  und  $K_{12}$ , den Punkten  $P_4$  bis  $P_{10}$  sowie dem Fächersegment  $F_4$ . Hier dargestellt ist die Dreiecks-Option des Fächers, bei dem die Kontrollpunkte eines Randes in einem Punkt zusammenfallen. Die Eckgruppe in der Plattenecke  $PE_4$  enthält nur den Kontrollpunkt  $P_1$ .

Die *inneren Fließlinien* und *inneren Punkte* ergeben sich aus der Geometrie der Plattensegmente der Rand- und Eckgruppen. Im Beispiel aus Abbildung 15.1 wird die Kante  $K_4$  aus der Schnittlinie der Ebenen  $E_1$  und  $E_7$  definiert.  $K_3$  ergibt sich aus dem Schnitt von Ebene  $E_1$  mit Ebene  $E_5$ . Analog erhält man auch die inneren Punkte aus dem Schnittpunkt von drei (oder mehr) Ebenen.  $P_{14}$  beispielsweise ist der Schnittpunkt von  $E_1$ ,  $E_5$  und  $E_7$ .

## 16 Phase 1

### 16.1 Programmablauf Phase 1

In Phase 1 wird für jeden Plattenbereich mit konstanten Grenzmomenten und konstanter Flächenlast das maßgebende Fließlinienmuster bestimmt. Abbildung 16.1 zeigt den Programmablaufplan für Phase 1. Anhand der Rand- und Eckgruppen wird das Fließlinienmuster definiert (Abschnitt 16.2). Gleichzeitig werden auch die freien Parameter festgelegt, die im Rahmen der Optimierung bestimmt werden sollen. In Abschnitt 16.3 wird gezeigt, wie die Punkte und Fließlinien im Platteninneren gefunden werden. Die Optimierungsparameter werden so bestimmt, dass die errechnete Traglast minimal wird. Anschließend wird geprüft, ob das gefundene Fließlinienmuster vereinfacht werden kann (siehe Abschnitt 16.5).

### 16.2 Aufbau des Fließlinienmusters in Phase 1

#### 16.2.1 Allgemein

Das Fließlinienmuster in Phase 1 wird anhand seiner Randgruppen erzeugt. Zwischen den Randgruppen werden Eckgruppen angeordnet, die die Randgruppen miteinander verbinden.

Für jeden Rand müssen alle anzuwendenden Randgruppen geprüft werden. Aus der Kombination der Randgruppen aller Ränder ergeben sich die zu überprüfenden Fließlinienmuster. Die Anzahl dieser Fließlinienmuster steigt dadurch exponentiell mit der Anzahl der Plattenränder.

Die Eckgruppen werden in Abhängigkeit von den Randgruppen der angrenzenden Ränder und in Abhängigkeit vom Winkel dieser Ränder gewählt. Jede Randgruppe und ein Teil der Eckgruppen besitzen *innere ebenen Plattensegmente*, aus denen sich der Verlauf und die Lage der Fließlinien und der Punkte im Inneren der Platte ergeben. Diese inneren, ebenen Plattensegmente werden mit  $E_x$  bzw.  $E_{x1}$ ,  $E_{x2}$  etc. bezeichnet. Die mit  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3 \dots$  bezeichneten Plattensegmente sind lokale Plattensegmente, die nur auf die jeweilige Rand- bzw. Eckgruppe Einfluss haben, nicht jedoch auf den Verlauf der Fließlinien im Platteninneren.

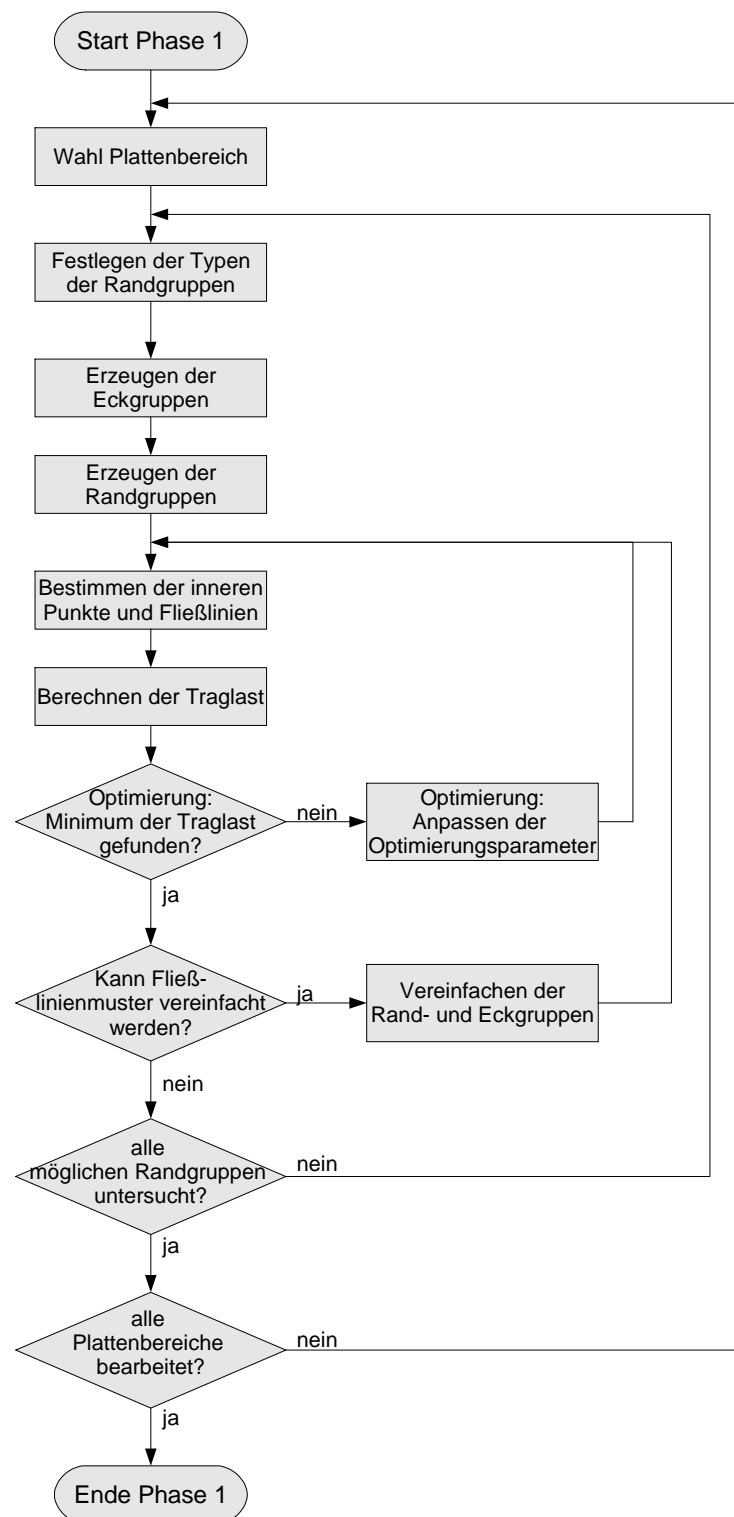


Abbildung 16.1: Programmablaufplan Phase 1

## 16.2.2 Randgruppen

Jeder Plattenrand wird für verschiedene Zustände untersucht. Bei kontinuierlich gestützten Rändern kann die Fließlinie entweder direkt am Plattenrand (Randgruppe Typ 1) oder im Inneren der Platte (Randgruppe Typ 2) verlaufen.

Bei nicht gestützten Rändern (d.h. freie Ränder oder Symmetrieränder) gibt es zusätzlich die Möglichkeit, dass sich der Rand vertikal verschiebt. Hierfür sind die Randgruppen Typ 3 und Typ 4 (siehe unten) vorgesehen.

### Randgruppe Typ 1

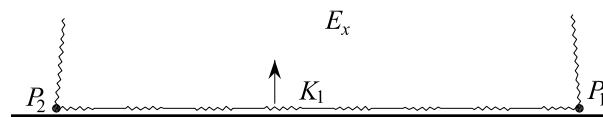


Abbildung 16.2: Randgruppe Typ 1

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  befinden sich auf dem Plattenrand. Abhängig von der anschließenden Eckgruppe besitzen diese Punkte den Punkttyp kp0 (Punkt in der Plattenecke) oder kp2 (Punkt nicht in der Plattenecke). Die Fließlinie  $K_1$  verbindet die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Um die Lage der ebenen Plattensegmente in der virtuellen Verschiebungsfigur zu veranschaulichen, wird in Abbildung 16.2 und den folgenden Abbildungen die Neigungsrichtung des Plattensegments durch Pfeile angegeben.

### Randgruppe Typ 2

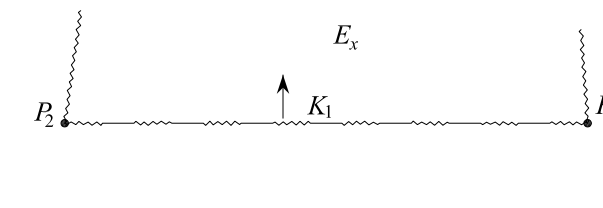


Abbildung 16.3: Randgruppe Typ 2

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  befinden sich nicht auf dem Plattenrand, sondern im Inneren der Platte. Die Punkttypen von  $P_1$  und  $P_2$  erhält man anhand der anschließenden Eckgruppe.

Die Kante  $K_1$  wie auch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  müssen sich im Inneren der Platte befinden. Um sicherzustellen, dass diese Punkte während der Optimierung nicht aus der Platte hinaus verschoben werden, sind zusätzliche Dummy-Dreiecks-Elemente vorhanden (Abbildung 16.4). Die ebenen Plattensegmente  $E_1$ , gebildet aus den Kanten

$K_{13}$ ,  $K_{14}$  und  $K_{34}$ , sowie  $E_2$ , gebildet aus den Kanten  $K_{23}$ ,  $K_{24}$  und  $K_{34}$ , besitzen weder eine innere noch eine äußere Arbeit und werden lediglich hinsichtlich ihres Flächeninhaltes untersucht. Ist dieser positiv, dann befinden sich die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  im Inneren der Platte. Je nach gewähltem Optimierungsalgorithmus wird das Fließlinienmuster entweder bei einem negativen Flächeninhalt eines dieser Plattensegmente als ungültig zurück gewiesen oder aber die Beziehungen  $\text{Fläche}(E_1) \geq 0$  und  $\text{Fläche}(E_2) \geq 0$  gehen als Nebenbedingung in die Optimierung ein.

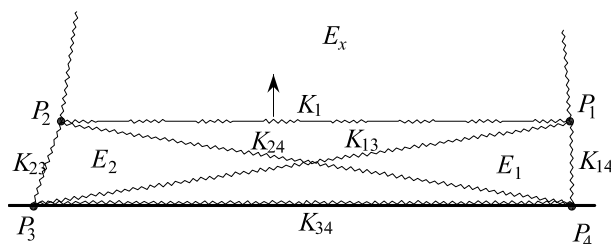


Abbildung 16.4: Randgruppe Typ 2

### Randgruppe Typ 3

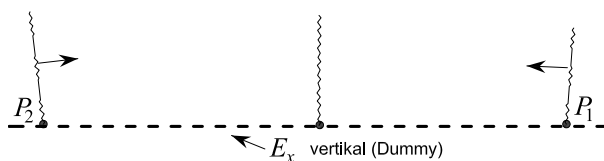


Abbildung 16.5: Randgruppe Typ 3

Bei dieser Randgruppe tritt eine Vertikalverschiebung des nicht gestützten Randes auf. Am verschieblichen Rand wird eine vertikale Hilfsebene (Dummy-Plattensegment) eingefügt. Der Algorithmus zur Bestimmung der Kanten und Punkte im Inneren der Platte (beschrieben in Abschnitt 16.3) ermittelt die inneren Punkte als Schnittpunkt von jeweils drei Ebenen. Durch die Einführung des vertikalen Dummy-Plattensegment  $E_x$  kann auch der nicht weiter bezeichnete Punkt in Abbildung 16.5 als Schnittpunkt dreier Ebenen errechnet werden. Es muss im Algorithmus zur Bestimmung der Punkte im Platteninneren nicht zwischen gestützten und verschieblichen Rändern unterschieden werden.

### Randgruppe Typ 4

Diese Randgruppe ist insbesondere zur Ermittlung der Tragfähigkeit punktgestützter Platten erforderlich (siehe Beispiel in Abschnitt 20.6).



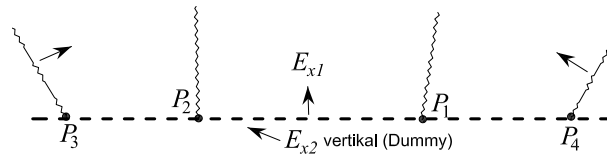


Abbildung 16.6: Randgruppe Typ 4

Im Vergleich zur Randgruppe Typ 3 besitzt diese Randgruppe ein zusätzliches ebenes Plattensegment ( $E_{x1}$ ).

### 16.2.3 Eckgruppen

Das Fließlinienmuster in der Plattenecke ist abhängig von den Lagerungsverhältnissen der beiden angrenzenden Ränder und dem Winkel, der von den Rändern eingeschlossen wird. Eine Unterscheidung nach eingespannt bzw. gelenkig ist nicht erforderlich.

Tabelle 16.1 zeigt die Klassifizierung *TypA* nach den Lagerungsbedingungen der Ränder. Tabelle 16.2 listet die jeweils zugehörige Einteilung *TypB* nach dem Platteninnenwinkel  $\alpha$  (siehe Abbildung 16.7) auf.

#### Verbindung Randgruppe - Eckgruppe

Die Eckgruppen besitzen wie auch die Randgruppen zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Bei einigen der Rand- und Eckgruppen gibt es auch noch weitere Punkte  $P_3$  und  $P_4$ . Diese Punkte der Eckgruppen sind gleichzeitig Punkte der anschließenden Randgruppen. (D.h. Punkt  $P_1$  der Eckgruppe ist gleichzeitig Punkt  $P_1$  der Randgruppe, ebenso  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$ .)

#### Ausgangszustand

Die genaue Lage der Punkte bei Beginn der Berechnung ist über einen Zufallsgenerator zu variieren, so dass beim wiederholten Optimierungslauf jedes mal eine geringfügig andere Ausgangskonstellation vorliegt. Dadurch soll vermieden werden, dass der Optimierungsalgorithmus wiederholt zu einem lokalen Minimum konvergiert.

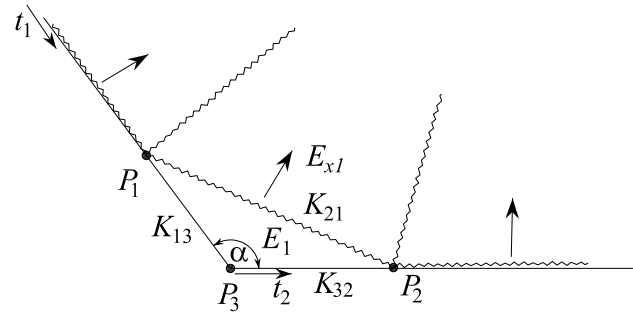
<i>TypA</i>	Rand 1	Rand 2	Eckpunkt
11	Typ 1	Typ 1	*)
12	Typ 1	Typ 2	*)
13	Typ 1	Typ 3	*)
14	Typ 1	Typ 4	*)
21	Typ 2	Typ 1	*)
22	Typ 2	Typ 2	*)
23	Typ 2	Typ 3	*)
24	Typ 2	Typ 4	*)
31	Typ 3	Typ 1	*)
32	Typ 3	Typ 2	*)
33A	Typ 3	Typ 3	nicht gestützt
33B	Typ 3	Typ 3	gestützt
34A	Typ 3	Typ 4	nicht gestützt
34B	Typ 3	Typ 4	gestützt
41	Typ 4	Typ 1	*)
42	Typ 4	Typ 2	*)
43A	Typ 4	Typ 3	nicht gestützt
43B	Typ 4	Typ 3	gestützt
44A	Typ 4	Typ 4	nicht gestützt
44B	Typ 4	Typ 4	gestützt

\*) Wenn eine der anschließenden Randgruppen den Typ 1 oder 2 hat, ist der Eckpunkt automatisch gestützt.

Tabelle 16.1: Einteilung der Eckgruppen nach der Lagerung der Ränder, Rand 1 ist der jeweils rechte Rand in den Abbildungen

$TypA$	$TypB = 1$	$TypB = 2$	$TypB = 3$
11	$\alpha < 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$180^\circ < \alpha$
12 / 21	$\alpha \leq 180^\circ$	$180^\circ < \alpha$	–
13 / 31	$\alpha \leq 90^\circ$	$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$	$180^\circ < \alpha$
14 / 41	$\alpha \leq 90^\circ$	$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$	$180^\circ < \alpha$
22	alle Winkel	–	–
23 / 32	$\alpha < 180^\circ$	$180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$	$270^\circ \leq \alpha$
24 / 42	$\alpha < 180^\circ$	$180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$	$270^\circ \leq \alpha$
33A	alle Winkel	–	–
33B	$\alpha \leq 120^\circ$	$120^\circ < \alpha$	–
34A / 43A	nicht möglich		
34B / 43B	$\alpha \leq 120^\circ$	$120^\circ < \alpha$	–
44A	alle Winkel	–	–
44B	$\alpha \leq 120^\circ$	$120^\circ < \alpha$	–

Tabelle 16.2: Einteilung der Eckgruppen nach dem Platteninnenwinkel

**Eckgruppen**  $TypA = 11$ Abbildung 16.7: Eckgruppe  $TypA = 11$   $TypB = 1$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp2	Punkt auf Rand 1, Parameter $t$ (siehe Tab. 15.1) zu Beginn $0.7 \leq t_1 \leq 0.9$
$P_2$	kp2	Punkt auf Rand 2, Parameter $t$ zu Beginn $0.1 \leq t_2 \leq 0.3$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke

Tabelle 16.3: Eckgruppe  $TypA = 11$   $TypB = 1$ 

Anmerkung: Die Darstellung in den Zeichnungen dieses Abschnitts orientiert sich nur an der Randgruppe des jeweiligen Randes, unabhängig von der wirklichen Lagerungssituation:

- Typ 1 und 2    —————    virtuelle Verschiebung am Plattenrand = 0  
 Typ 3 und 4    - - - - -    virtuelle Verschiebung am Plattenrand  $\neq 0$

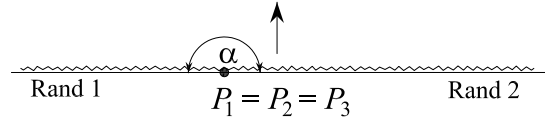


Abbildung 16.8: Eckgruppe  $TypA = 11$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.4: Eckgruppe  $TypA = 11$   $TypB = 2$

Diese Eckgruppe stellt einen Sonderfall dar. Die ebenen Plattensegmente  $E_x$  der beiden anschließenden Randgruppen besitzen eine gemeinsame Rotationsachse auf dem Plattenrand. Dadurch läßt sich keine Fließlinie zwischen diesen ebenen Plattensegmenten finden. Die beiden Plattensegmente müssen den gleichen Rotationswinkel aufweisen. Es handelt sich demzufolge nur um ein einziges ebenes Plattensegment, das sich über beide Plattenränder erstreckt.

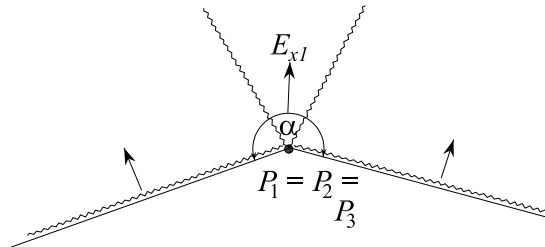


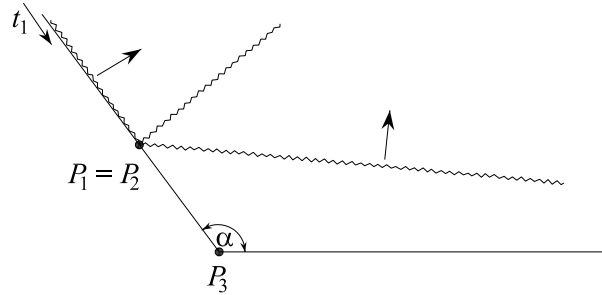
Abbildung 16.9: Eckgruppe  $TypA = 11$   $TypB = 3$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.5: Eckgruppe  $TypA = 11$   $TypB = 3$

**Eckgruppen**  $TypA = 12 / 21$ 

Die Eckgruppen vom  $TypA = 21$  sind spiegelgleich zu den Eckgruppen vom  $TypA = 12$ , jedoch mit  $P_4$  statt  $P_3$ .

Abbildung 16.10: Eckgruppe  $TypA = 12$   $TypB = 1$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp2	Punkt auf Rand 1, Parameter $t$ zu Beginn $0.7 \leq t_1 \leq 0.9$
$P_2$	kp2	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke

Tabelle 16.6: Eckgruppe  $TypA = 12$   $TypB = 1$

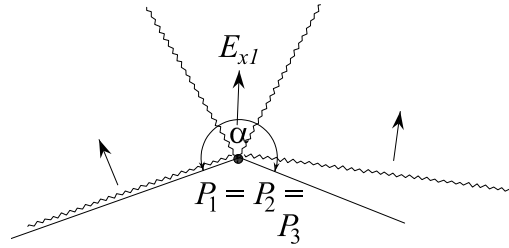


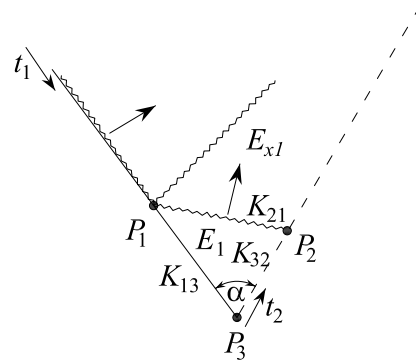
Abbildung 16.11: Eckgruppe  $TypA = 12$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.7: Eckgruppe  $TypA = 12$   $TypB = 2$

**Eckgruppen**  $TypA = 13 / 31$ 

Die Eckgruppen vom  $TypA = 31$  sind spiegelgleich zu den Eckgruppen vom  $TypA = 13$ , jedoch mit  $P_1$  und  $P_2$  vertauscht und  $P_4$  statt  $P_3$ .

Abbildung 16.12: Eckgruppe  $TypA = 13$   $TypB = 1$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp2	Punkt auf Rand 1, Parameter $t$ zu Beginn $0.7 \leq t_1 \leq 0.9$
$P_2$	kp3	Punkt auf Rand 2 (verschieblich), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 \leq t_2 \leq 0.3$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke

Tabelle 16.8: Eckgruppe  $TypA = 13$   $TypB = 1$



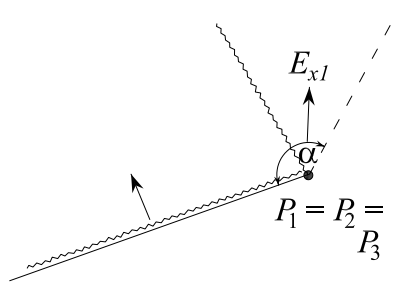


Abbildung 16.13: Eckgruppe  $TypA = 13$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.9: Eckgruppe  $TypA = 13$   $TypB = 2$

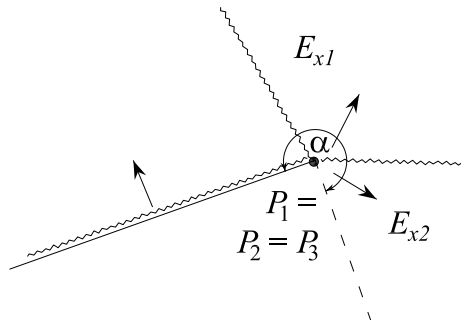


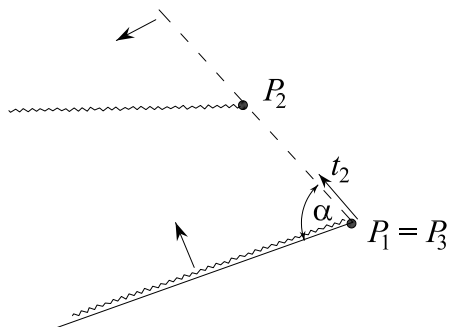
Abbildung 16.14: Eckgruppe  $TypA = 13$   $TypB = 3$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.10: Eckgruppe  $TypA = 13$   $TypB = 3$

**Eckgruppen**  $TypA = 14 / 41$ 

Die Eckgruppen vom  $TypA = 41$  sind spiegelgleich zu den Eckgruppen vom  $TypA = 14$ , jedoch mit  $P_1$  und  $P_2$  vertauscht und  $P_4$  statt  $P_3$ .

Abbildung 16.15: Eckgruppe  $TypA = 14$   $TypB = 1$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_x$ von Rand 1), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.11: Eckgruppe  $TypA = 14$   $TypB = 1$

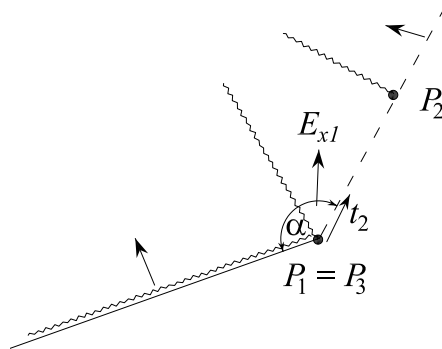
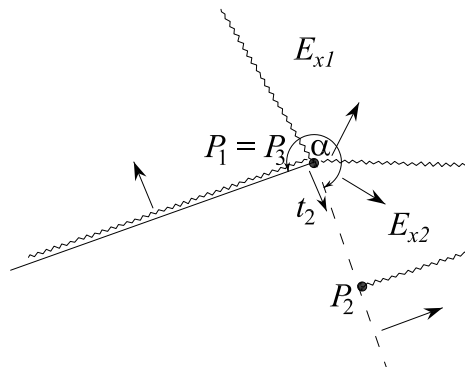


Abbildung 16.16: Eckgruppe  $TypA = 14$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x1}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.12: Eckgruppe  $TypA = 14$   $TypB = 2$

Abbildung 16.17: Eckgruppe  $TypA = 14$   $TypB = 3$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x2}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.13: Eckgruppe  $TypA = 14$   $TypB = 3$

**Eckgruppen**  $TypA = 22$

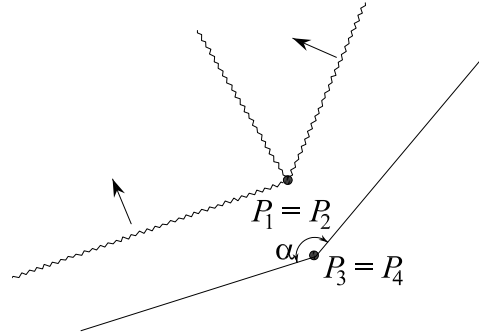


Abbildung 16.18: Eckgruppe  $TypA = 22$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp4	Punkt in $x$ - und $y$ -Richtung beweglich
$P_2$	kp4	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_4$	kp0	identisch mit $P_3$

Tabelle 16.14: Eckgruppe  $TypA = 22$   $TypB = 1$

**Eckgruppen**  $TypA = 23 / 32$ 

Die Eckgruppen vom  $TypA = 32$  sind spiegelgleich zu den Eckgruppen vom  $TypA = 23$ .

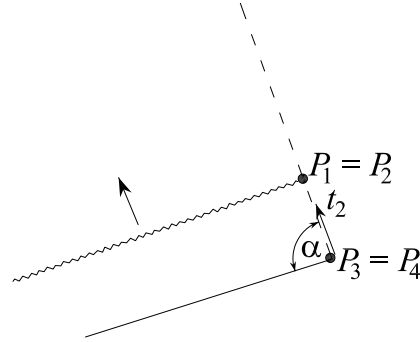


Abbildung 16.19: Eckgruppe  $TypA = 23$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp3	identisch mit $P_2$
$P_2$	kp3	Punkt auf Rand 2 (verschieblich), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 \leq t_2 \leq 0.3$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_4$	kp0	identisch mit $P_3$

Tabelle 16.15: Eckgruppe  $TypA = 23$   $TypB = 1$

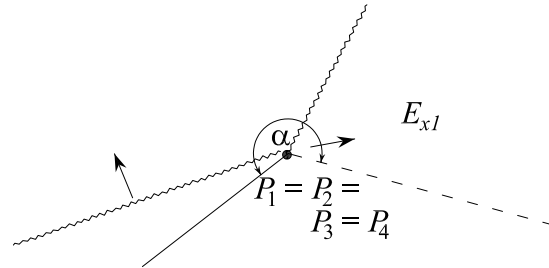


Abbildung 16.20: Eckgruppe  $TypA = 23$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.16: Eckgruppe  $TypA = 23$   $TypB = 2$

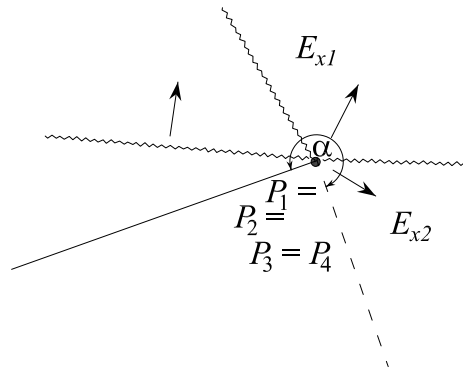


Abbildung 16.21: Eckgruppe  $TypA = 23$   $TypB = 3$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.17: Eckgruppe  $TypA = 23$   $TypB = 3$



### Eckgruppen $TypA = 24$ / 42

Die Eckgruppen vom  $TypA = 42$  sind spiegelgleich zu den Eckgruppen vom  $TypA = 24$ , jedoch mit  $P_1$  und  $P_2$  vertauscht sowie  $P_4$  und  $P_3$  vertauscht.

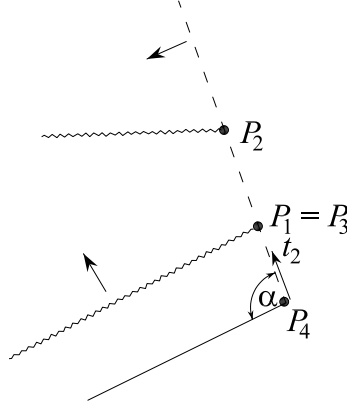
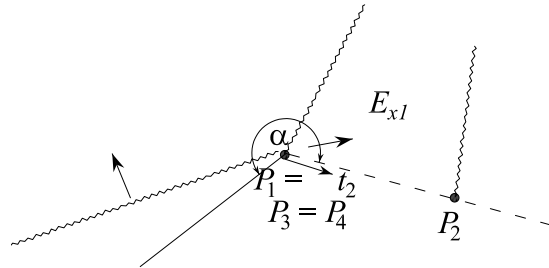


Abbildung 16.22: Eckgruppe  $TypA = 24$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp2	Punkt auf Rand 2, Parameter $t$ zu Beginn $0.1 \leq t_{2,1} \leq 0.2$
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_x$ von Rand 1), Parameter $t$ zu Beginn $0.3 < t_{2,2} <$ $0.4$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	Punkt auf Plattenecke

Tabelle 16.18: Eckgruppe  $TypA = 24$   $TypB = 1$

Abbildung 16.23: Eckgruppe  $TypA = 24$   $TypB = 2$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x1}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.19: Eckgruppe  $TypA = 24$   $TypB = 2$

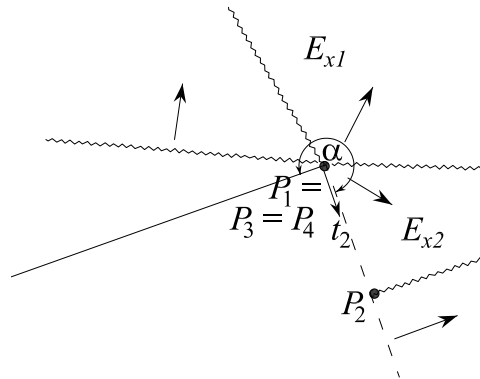


Abbildung 16.24: Eckgruppe  $TypA = 24$   $TypB = 3$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x2}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.20: Eckgruppe  $TypA = 24$   $TypB = 3$

**Eckgruppen  $TypA = 33A$**

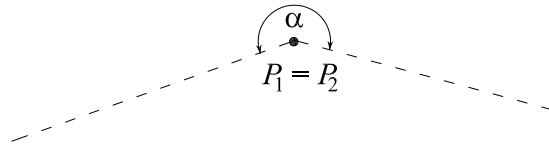


Abbildung 16.25: Eckgruppe  $TypA = 33A$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.21: Eckgruppe  $TypA = 33A$   $TypB = 1$

**Eckgruppen  $TypA = 33B$**

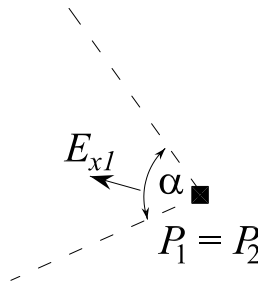


Abbildung 16.26: Eckgruppe  $TypA = 33B$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.22: Eckgruppe  $TypA = 33B$   $TypB = 1$

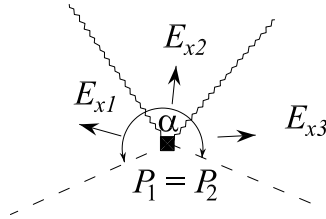


Abbildung 16.27: Eckgruppe  $TypA = 33B$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp0	identisch mit $P_1$

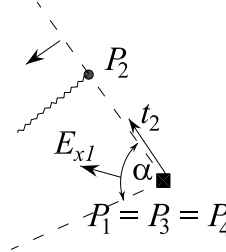
Tabelle 16.23: Eckgruppe  $TypA = 33B$   $TypB = 2$

### Eckgruppen $TypA = 34A$

Eckgruppen von diesem Typ sind ebenso wie die vom  $TypA=43A$  nicht möglich.

**Eckgruppen**  $TypA = 34B$ 

Die Eckgruppen vom  $TypA = 43B$  sind spiegelgleich zu den Eckgruppen vom  $TypA = 34B$ , jedoch mit  $P_1$  und  $P_2$  vertauscht.

Abbildung 16.28: Eckgruppe  $TypA = 34B$   $TypB = 1$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x1}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.24: Eckgruppe  $TypA = 34B$   $TypB = 1$

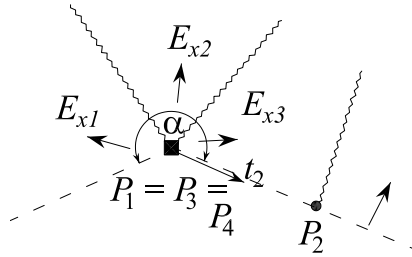


Abbildung 16.29: Eckgruppe  $TypA = 34B$   $TypB = 2$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x3}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	identisch mit $P_1$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_1$

Tabelle 16.25: Eckgruppe  $TypA = 34B$   $TypB = 2$

### Eckgruppen $TypA = 44A$

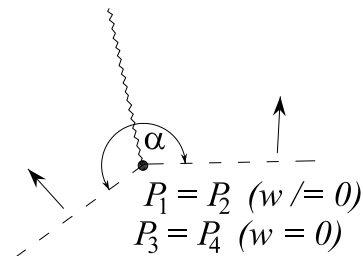


Abbildung 16.30: Eckgruppe  $TypA = 44A$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp1	Punkt auf Plattenecke, vertikal verschieblich mit $\delta w \neq 0$
$P_2$	kp1	identisch mit $P_1$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke, mit $\delta w = 0$
$P_4$	kp0	identisch mit $P_3$

Tabelle 16.26: Eckgruppe  $TypA = 44A$   $TypB = 1$



**Eckgruppen**  $TypA = 44B$

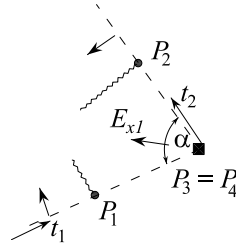
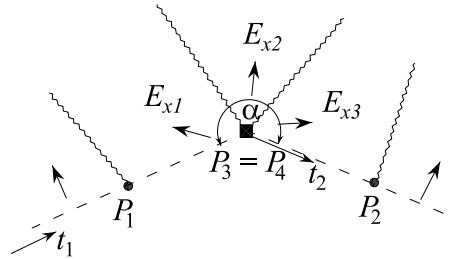


Abbildung 16.31: Eckgruppe  $TypA = 44B$   $TypB = 1$

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp11	Punkt auf Rand 1 (auf Plattensegment $E_{x1}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.7 < t_1 < 0.9$
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x1}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_4$	kp0	identisch mit $P_3$

Tabelle 16.27: Eckgruppe  $TypA = 44B$   $TypB = 1$

Abbildung 16.32: Eckgruppe  $TypA = 44B$   $TypB = 2$ 

Punkt	Typ	Beschreibung
$P_1$	kp11	Punkt auf Rand 1 (auf Plattensegment $E_{x1}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.7 < t_1 < 0.9$
$P_2$	kp11	Punkt auf Rand 2 (auf Plattensegment $E_{x3}$ ), Parameter $t$ zu Beginn $0.1 < t_2 < 0.3$
$P_3$	kp0	Punkt auf Plattenecke
$P_4$	kp0	identisch mit $P_3$

Tabelle 16.28: Eckgruppe  $TypA = 44B$   $TypB = 2$

## 16.3 Bestimmung der inneren Punkte und Fließlinien

### 16.3.1 Vorbemerkungen zum Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien

Nachdem die Randgruppen und die Eckgruppen definiert wurden, sind im nächsten Schritt die Fließlinien im Inneren der Platte zu ermitteln.

Die Kanten  $P_1 - P_2$  der Randgruppen und  $P_2 - P_1$  der Eckgruppen (sofern nicht  $P_1$  und  $P_2$  in einem Punkt zusammenfallen) ergeben einen geschlossenen Polygonzug. Dieser Polygonzug ist das *Randpolygon* des zu untersuchenden Bereichs. Bei Platten mit Aussparungen können die oben genannten Kanten gegebenenfalls auch zwei oder mehr geschlossene Polygonzüge ergeben. Dabei beschreibt ein äußeren Polygonzug den Rand des untersuchten Plattenbereichs, die übrigen Polygonzüge entsprechen den Rändern der Aussparungen.

Jedem *Polygonrand* (d.h. Kante des Randpolygons) ist ein ebenes Plattensegment  $E_x$  der Rand- bzw. Eckgruppen zugeordnet. Die Lage dieser Plattensegmente in der virtuellen Verschiebungsfigur ist durch den Anfangs- und den Endpunkt der Polygonränder sowie der Neigung  $\delta\theta$  eindeutig definiert.

Im folgenden wird ein Algorithmus zum Auffinden der Fließlinien im Inneren des Randpolygons beschrieben. Dieser Algorithmus nimmt in den ersten beiden Phasen den größten Teil der Rechenzeit ein. Daher wurde beim Entwurf dieses Algorithmus großer Wert auf eine möglichst hohe Ausführungsgeschwindigkeit gelegt. Zur Erläuterung werden die einzelnen Schritte am Beispiel der Sechseckplatte in Abbildung 16.33 nachvollzogen. Abbildung 16.34 zeigt die Platte mit den bereits erstellten Rand- und Eckgruppen.

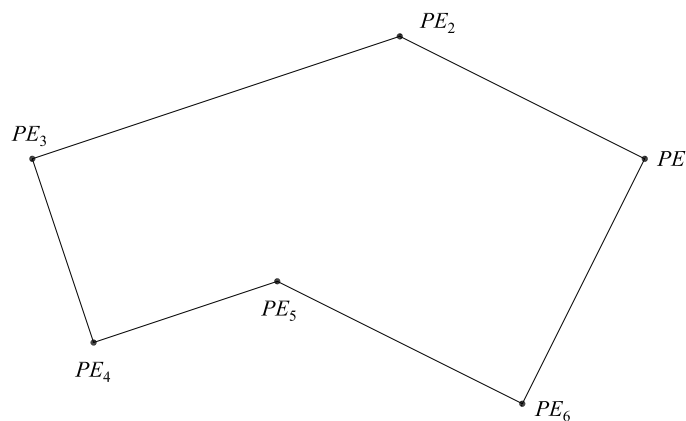


Abbildung 16.33: Geometrie Sechseckplatte

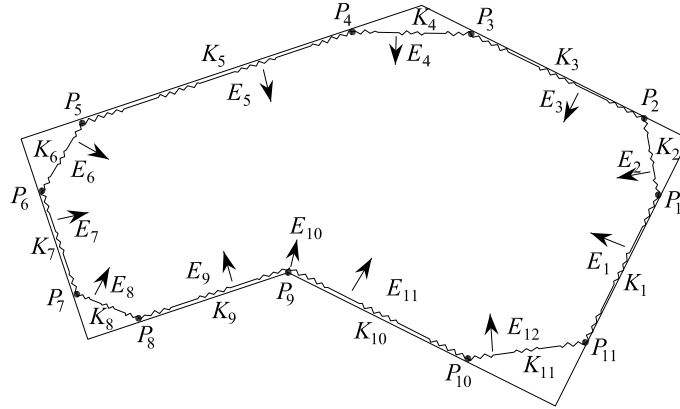


Abbildung 16.34: Sechseckplatte mit Rand- und Eckgruppen

Das Fließlinienmuster kann wie bereits beschrieben einerseits als ebenes, durch die Fließlinien erzeugtes, zweidimensionales Bild auf der Platte aufgefasst werden, andererseits aber auch als räumliches, dreidimensionales Gebilde, indem jedem Punkt seine virtuelle Verschiebung  $\delta w$  in der virtuellen Verschiebungsfigur als dritte Dimension zugewiesen wird. Zwecks Minimierung der Laufzeit sollten beide Betrachtungsweisen simultan angewandt werden, um in jedem Schritt die jeweils günstigere nutzen zu können.

Das Fließlinienmuster wird bestimmt, indem nacheinander für jedes ebene Plattensegment die Fließlinien des Umrisspolygons ermittelt werden. Die umrandenden Fließlinien werden aus den Schnittgeraden mit den übrigen Plattensegmenten (im dreidimensionalen Raum mit  $\delta w$  als dritte Dimension) bestimmt (siehe Schritt 3 des Algorithmus). Nachdem ein möglicher Umriss eines Plattensegments bestimmt wurde, wird geprüft, ob dieser Umriss mit den übrigen Plattensegmenten kompatibel ist (siehe Schritt 6 des Algorithmus) und gegebenenfalls wieder verworfen.

Nachdem für alle ebenen Plattensegmente ein Umriss bestimmt wurde, ist ein gültiges Fließlinienmuster gefunden. Unter Umständen können sich aus den Randbedingungen mehrere gültige Fließlinienmuster ergeben. Abbildung 16.35 zeigt ein solches Beispiel. Deshalb darf der Algorithmus nicht sofort beim Auffinden einer Lösung beendet werden, sondern erst nach Testen aller Möglichkeiten.

Die Platte im Beispiel in Abbildung 16.35 ist allseitig gelenkig gelagert, isotrop mit  $m_u^+ = -m_u^- = m_u$  und mit einer verteilten Flächenlast  $p$  belastet. Jedem Plattenrand ist ein ebenes Plattensegment zugeordnet, wobei der Plattenrand gleichzeitig die Rotationsachse des Plattensegments ist. Die virtuelle Verdrehung  $\delta\theta$  jedes Plattensegments um seine Rotationsachse ist in der Abbildung angegeben.

Mit diesen ebenen Plattensegmenten und den gegebenen virtuellen Verdrehungen lassen sich die beiden Fließlinienmuster in Abbildung 16.35a) und b) konstruieren. Im dargestellten Beispiel hat das linke Fließlinienmuster ein Traglastfaktor von  $\lambda_{T,a} = 13.2 \frac{m_u}{a^2 p}$ . Zum rechten Fließlinienmuster gehört ein Traglastfaktor von

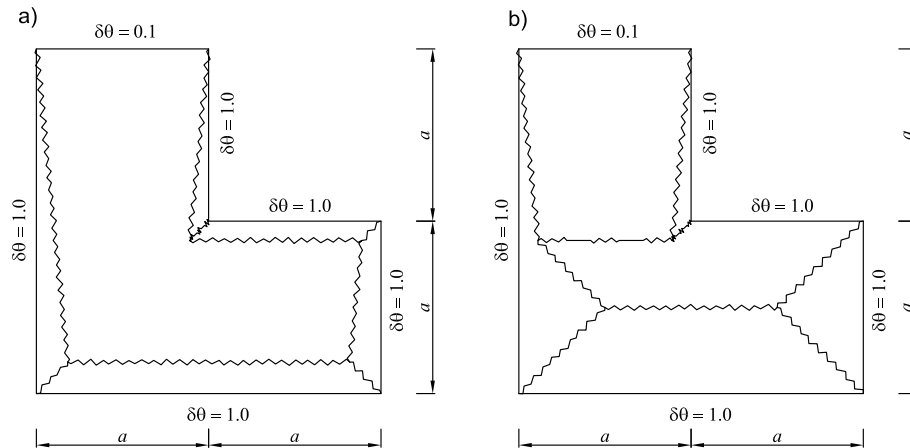


Abbildung 16.35: Beispiel mit zwei möglichen Lösungen

$\lambda_{T,b} = 6.75 \frac{m_u}{a^2 p}$ . In solchen Fällen mit mehreren möglichen Fließlinienmustern ist das Fließlinienmuster mit dem kleineren Traglastfaktor maßgebend. In diesem Beispiel ist dies das Fließlinienmuster b.

### 16.3.2 Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien - Übersicht

Die inneren Punkte und Fließlinien werden bestimmt, indem für jedes ebene Platten-segment das Umrisspolygon ermittelt wird. In diesem Abschnitt wird zum besseren Verständnis eine kurze Übersicht über den Ablauf des Algorithmus gegeben, der Programmablaufplan ist in Abbildung 16.36 dargestellt.

In **Schritt 1** des Algorithmus wird das Plattensegment ausgewählt, für welches als nächstes das Umrisspolygon ermittelt werden soll.

In **Schritt 2** wird mit dem Bearbeiten dieses Plattensegments begonnen. Der Startpunkt und der Endpunkt des Umrisspolygons werden festgelegt. Ebenso wird das Nachbarsegment an der ersten Fließlinie ermittelt und damit die Richtung der ersten Fließlinie bestimmt. Wenn das Umrisspolygon des Nachbarsegments noch nicht ermittelt ist, so wird im Schritt 3 die Länge der Fließlinie bestimmt. Anderenfalls wird in Schritt 4/5 die vorhandene Fließlinie zwischen dem aktuell untersuchten Plattensegment und seinem Nachbarsegment in das Umrisspolygon aufgenommen.

**Schritt 3** dient der Bestimmung der Länge einer neuen Fließlinie. Von dieser Fließlinie ist der Startpunkt und der Richtungsvektor bekannt, sowie die Nummer des an diese Fließlinie angrenzenden Nachbarsegments. Der Endpunkt der Fließlinie muss auf dem aktuell untersuchten Plattensegment, dem Nachbarsegment sowie auf einem

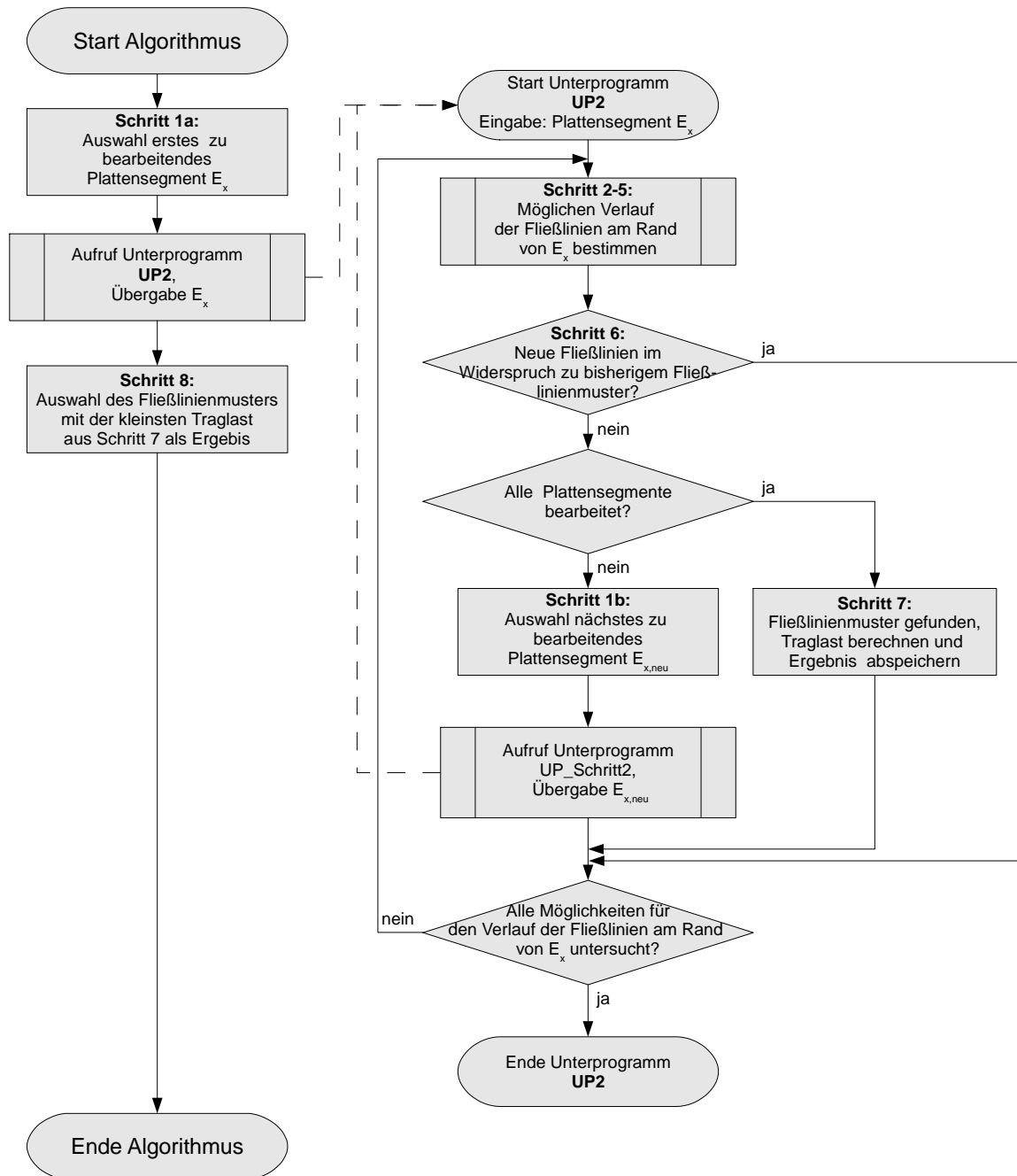


Abbildung 16.36: Programmablaufplan des Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien

dritten Plattensegment liegen. Für dieses dritte Plattensegment sind alle möglichen Fälle zu untersuchen. Für jeden dieser Fälle gibt es einen möglichen Endpunkt der neuen Fließlinie. Nachdem so ein möglicher Endpunkt bestimmt wurde, wird der Richtungsvektor der von diesem Punkt ausgehenden Fließlinie bestimmt (diese Fließlinie verläuft zwischen dem aktuell untersuchten Plattensegment und dem dritten Plattensegment).

Wenn das Umrisspolygon des dritten Plattensegments noch nicht bestimmt wurde, so ist die Länge dieser Fließlinie wieder mit Schritt 3 zu bestimmen. Dabei ist der Endpunkt der letzten Fließlinie der Startpunkt der neuen Fließlinie und das dritte Plattensegment ist das neue Nachbarsegment.

Wenn das Umrisspolygon des dritten Plattensegments bereits erstellt wurde, so muss der Endpunkt der Fließlinie mit einem Punkt des Umrisspolygons des dritten Plattensegments übereinstimmen. Der Algorithmus geht mit Schritt 5 weiter.

In **Schritt 4** wird eine vorhandene Fließlinie in das Umrisspolygon des aktuell untersuchten Plattensegments eingefügt. Die nächste Fließlinie muss dann vom Endpunkt dieser Fließlinie ausgehen. Daran anschließend wird in **Schritt 5** überprüft, ob es an diesem Endpunkt bereits eine weitere Fließlinie gibt, die an das aktuell untersuchte Fließlinienmuster angrenzt. Wenn dem so ist, wird auch diese Fließlinie mit Schritt 4/5 in das Umrisspolygon aufgenommen. Wenn es keine weitere Fließlinie wie beschrieben gibt, so werden alle Plattensegmente gesucht, die als neues Nachbarsegment in Frage kommen. Mit diesen neuen Nachbarsegmenten wird jeweils ein neuer Richtungsvektor für die nächste Fließlinie errechnet und der Algorithmus mit Schritt 3 fortgesetzt.

Wenn das Umrisspolygon des untersuchten Plattensegments erstellt ist, wird in **Schritt 6** überprüft, ob dieses Umrisspolygon im Widerspruch zu den Umrisspolygonen der bisher untersuchten Plattensegmente steht.

Jedes Plattensegment speichert dazu auch Informationen über seine angrenzenden Nachbarsegmente. Wenn jetzt ein Plattensegment (z.B.  $E_{12}$ ) die Information besitzt, dass es einen Nachbarn (z.B.  $E_4$ ) hat, aber im Umrisspolygon von  $E_4$  ist  $E_{12}$  nicht als Nachbarsegment enthalten, so stehen diese beiden Umrisspolygone im Widerspruch zueinander.

Dieser Fall tritt während des Ablaufes des Algorithmus sehr häufig auf und bedeutet, dass das zuletzt gefundene Umrisspolygon wieder verworfen werden muss.

Wenn die Umrisspolygone aller Plattensegmente widerspruchsfrei bestimmt wurden, so wird in **Schritt 7** der zum Fließlinienmuster gehörende Traglastfaktor bestimmt.

Wenn wie im Beispiel in Abbildung 16.35 mehrere widerspruchsfreie Fließlinienmuster existieren, so wird in **Schritt 8** dasjenige mit dem kleinsten Traglastfaktor als maßgebend ausgewählt.

### 16.3.3 Algorithmus zur Bestimmung der inneren Fließlinien - ausführliche Darstellung

In der nachfolgenden Darstellung des Algorithmus ist jeder Schritt als eigenständiges Unterprogramm zu interpretieren. Die Anweisung „zurück“ entspricht dabei einem Rücksprung zum aufrufenden Unterprogramm. Der Programmablauf selbst ist dabei nichtlinear, die Unterprogramme werden rekursiv aufgerufen.

#### Algorithmus Start

Gehe zu Schritt 1a, danach Schritt 8.

#### Schritt 1a: Auswahl des ersten Plattensegments

Das erste zu bearbeitende ebene Plattensegment kann zufällig gewählt werden. Die Wahl hat nur einen geringen Einfluss auf den Rechenaufwand.

Weiter mit Schritt 2, danach zurück.

#### Schritt 1b: Auswahl des nächsten Plattensegments

Überprüfen: Noch nicht bearbeitete Plattensegmente vorhanden?

*Wenn NEIN:* Weiter mit Schritt 7, danach zurück.

*Wenn JA:* Um möglichst wenige falsche Muster testen zu müssen, ist ein ebenes Plattensegment zu wählen, das möglichst schnell mit dem bereits bestehenden Fließlinienmuster zum Widerspruch geführt werden kann.

Dazu wählt man ein ebenes Plattensegment, für das bereits möglichst viele Fließlinien im Fließlinienmuster (d.h. in den Umrisspolygonen der bereits untersuchten Plattensegmente) existieren. Diese müssen in den Umriss des Plattensegments integriert werden, da sonst Widersprüche auftreten. Dies schränkt die zu untersuchenden Möglichkeiten ein.

Weiter mit Schritt 2, danach zurück.

#### Schritt 2: Beginn Bearbeitung des ebenen Plattensegments

Startpunkt  $P_S$  des Umrisspolygons des zu untersuchenden Plattensegments ist der Startpunkt der zum Plattensegment gehörenden Kante des Randpolygons. Endpunkt  $P_E$  des Umrisspolygons ist der Endpunkt zugehörigen Kante des Randpolygons.

Das Nachbarsegment  $E_N$  ist das ebene Plattensegment links vom aktuellen Plattensegment  $E_x$ .

Überprüfen: Wurde Plattensegment  $E_N$  bereits bearbeitet?

*Wenn NEIN:* Es gibt noch keine Fließlinie zwischen Plattensegment  $E_x$  und  $E_N$ . Berechne die möglichen Richtungen  $r_1$  der neuen Fließlinie. Mögliche Richtungen sind  $r_{1a} = n(E_x) \times n(E_N)$  und  $r_{1b} = -n(E_x) \times n(E_N)$ , wobei  $n(E)$  der Normalenvektor der Ebene des Plattensegments  $E$  in der virtuellen Verschiebungsfigur (d.h. am verformten System) ist.

Anhand der Richtungen der Kanten des Randpolygons von  $E_x$  und  $E_N$  ist zu prüfen, welche der Richtungen  $r_{1a}$  und  $r_{1b}$  möglich ist. Je nachdem, ob die zu bestimmende Fließlinie positiv oder negativ ist, kann jede der beiden Richtungen als möglicher



Vektor in Frage kommen. An konkaven Polygonecken mit stark unterschiedlichen Neigungen der beiden Plattensegmente können auch beide Richtungen möglich sein. In diesem Fall sind auch beide Richtungen zu testen.

Weiter mit Schritt 3, danach zurück.

*Wenn JA:* Es gibt bereits eine Fließlinie zwischen Plattensegment  $E_x$  und  $E_N$ .

Weiter mit Schritt 4, danach zurück.

### Schritt 3: neue Fließlinie erstellen

Die nächste Fließlinie muss von  $P_S$  (Startpunkt der Fließlinie) aus in Richtung  $r_1$  (Richtungsvektor der Fließlinie) verlaufen. Der Richtungsvektor  $r_1$  ist dabei dreidimensional mit der virtuellen Verschiebung  $\delta w$  als dritte Dimension definiert.

Überprüfen: Gibt es bereits einen Punkt  $P$  ( $P \neq P_S$ ) auf Plattensegment  $E_x$  und  $E_N$ ?

*Wenn JA:* Dieser Punkt  $P$  sei  $P_k$ . Überprüfen, dass  $P_k$  in der richtigen Richtung  $r_1$  liegt (wenn nicht, dann zurück). Die neue Fließlinie führt von  $P_S$  bis  $P_k$ . Überprüfen, ob die neue Fließlinie Schnittpunkte mit bereits vorhandenen Fließlinien hat (wenn JA, dann zurück). Weiter mit Schritt 5, danach zurück.

*Wenn NEIN:* Da sich Fließlinien nicht kreuzen dürfen, gibt es eine maximale Länge, die die neue Fließlinie haben kann. Im Grundriss werden die Schnittpunkte des Strahls  $P_S + t \cdot r_1$  ( $t > 0$ ) mit den bereits vorhandenen Fließlinien berechnet.  $r_1$  ist dabei der Richtungsvektor der neuen Fließlinie. Von diesen Schnittpunkten wird derjenige mit dem kleinsten Wert für  $t$  ausgewählt. Dieser Wert ist gleichzeitig der maximale Faktor  $t_{max}$ , so dass die neue Fließlinie keine vorhandenen Fließlinien schneidet, wenn  $t < t_{max}$  ist.

Alle ebenen Plattensegmente  $E_S$  mit  $E_S \neq E_x$  und  $E_S \neq E_N$ , die noch nicht untersucht wurden, werden ausgewählt. Für diese  $E_S$  wird (dreidimensional) die Länge  $t \cdot r_1$  des Strahls von Punkt  $P_S$  mit Richtungsvektor  $r_1$  bis zum Durchstoßpunkt durch die Ebene des Plattensegments  $E_S$  bestimmt. Es ist zu überprüfen, ob die Bedingungen  $t < t_{max}$  und  $t > 0$  erfüllt sind. Dieser Punkt ist ein möglicher Endpunkt der Fließlinie. Für jedes dieser Plattensegmente ist der berechnete Endpunkt der Fließlinie als neuer Startpunkt  $P_S$  für die nächste Fließlinie anzusehen.

Die möglichen Richtungen  $r_2$  der nächsten Fließlinie (zwischen  $E_x$  und  $E_S$ ) sind zu berechnen. Mögliche sind  $r_{2a} = n(E_x) \times n(E_S)$  und  $r_{2b} = -n(E_x) \times n(E_S)$ . Danach sind die möglichen Richtungen  $r_3$  der Fließlinie zwischen  $E_N$  und  $E_S$  zu berechnen:  $r_{3a} = n(E_N) \times n(E_S)$  und  $r_{3b} = -n(E_N) \times n(E_S)$ .

Da beide Fließlinien in Richtung  $r_1$  und  $r_2$  auf der linken Seite an das momentan untersuchte Plattensegment  $E_x$  angrenzen, muss sich der Richtungsvektor  $r_3$  rechts vom Polygonzug, gebildet von  $r_1$  und  $r_2$ , befinden. Für jede der beiden möglichen Richtungen  $r_{2a}$  und  $r_{2b}$  ist also zu überprüfen, ob es eine mögliche Richtung von  $r_3$  gibt, so dass vom neuen Punkt  $P_S$  aus gesehen  $-r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$  im Uhrzeigersinn angeordnet sind. Wenn es eine solche Anordnung nicht gibt, kann  $r_2$  nicht in diese Richtung verlaufen.

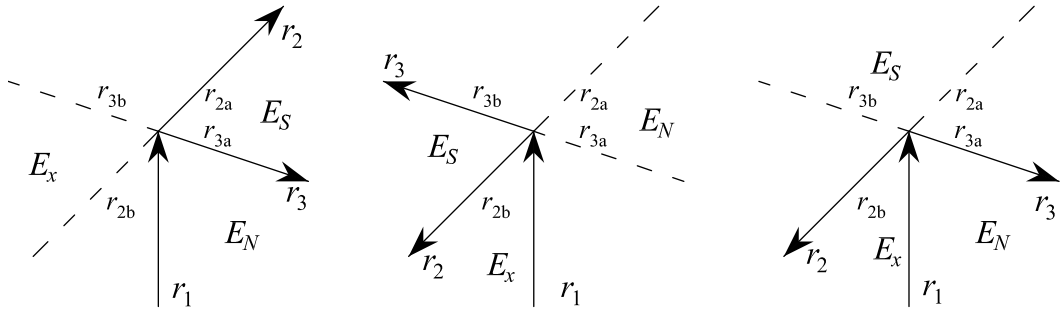


Abbildung 16.37: drei Plattensegmente mit mehreren möglichen Fließlinienverläufen

In Abbildung 16.37 ist ein Beispiel dargestellt, in dem beide Richtungen  $r_{2a}$  und  $r_{2b}$  als mögliche Richtung  $r_2$  für die nächste Fließlinie in Frage kommen. Dies ist immer dann der Fall, wenn positive und negative Fließlinien in einem Punkt zusammentreffen. Abbildung 16.38 zeigt diese Situation dreidimensional in der virtuellen Verschiebungsfigur. Das ebene Plattensegment  $E_x$  ist dunkel,  $E_N$  mittel und  $E_S$  hell dargestellt. Bei jeweils identischer Lage der Ebenen der drei Plattensegmente kann jede der drei dargestellten Situationen auftreten.

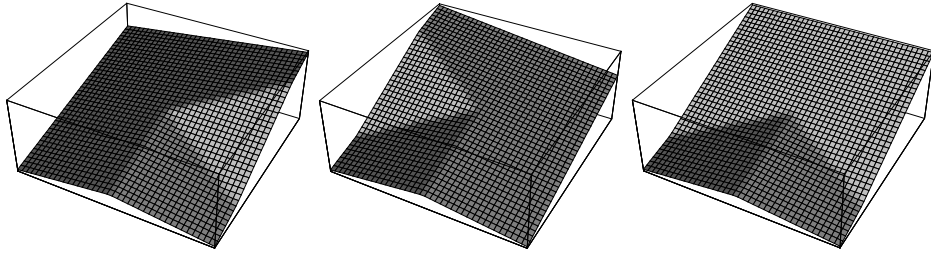


Abbildung 16.38: drei Plattensegmente mit mehreren möglichen Fließlinienverläufen (dreidimensionale Darstellung)

Wenn die drei Fließlinien zwischen den ebenen Plattensegmenten  $E_x$ ,  $E_N$  und  $E_S$  entweder alle positiv oder alle negativ sind, dann gibt es stets nur eine mögliche Richtung für  $r_2$  (Abbildung 16.39).

$r_2$  wird der neue Vektor  $r_1$ .  $r_3$  wird für die weitere Betrachtung nicht mehr benötigt. Weiter mit Schritt 3, danach zurück.

#### Schritt 4: vorhandene Fließlinie weiterverfolgen

Die Fließlinie wird in das Umrisspolygon aufgenommen. Der Endpunkt der Fließlinie wird der neue Punkt  $P_S$ , d.h. der Anfangspunkt der nächsten Fließlinie. Weiter mit Schritt 5, danach zurück.

#### Schritt 5: Von vorhandenem Punkt weitergehen

Überprüfen: Ist  $P_S$  mit  $P_E$  identisch?

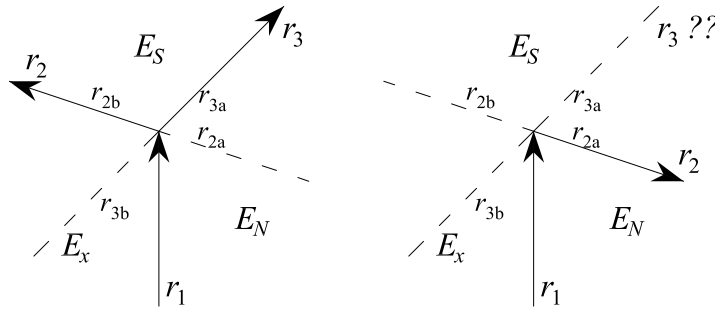


Abbildung 16.39: drei Plattensegmente mit einem eindeutigen Verlauf der Fließlinien

Wenn JA: Plattensegment  $E_x$  fertig.

Weiter mit Schritt 6, danach zurück.

Wenn NEIN:

Überprüfen: Gibt es eine Fließlinie, die an Plattensegment  $E_x$  angrenzt, die von  $P_S$  wegführt und die noch nicht im Umrisspolygon von  $E_x$  enthalten ist?

Wenn JA: Das neue Nachbarsegment  $E_N$  wird durch diese Fließlinie bestimmt. Weiter mit Schritt 4, danach zurück.

Wenn NEIN: Suche alle ebenen Plattensegmente  $E_S \neq E_x$ , die durch  $P_S$  gehen, und für die noch nicht das Umrisspolygon erstellt wurde.

Die möglichen Richtungen  $r_1$  der neuen Fließlinie sind zu berechnen:  $r_{1a} = n(E_x) \times n(E_S)$  und  $r_{1b} = -n(E_x) \times n(E_S)$ .

Überprüfen: Gibt es am Punkt  $P_S$  im Grundriss eine Fließlinie im Uhrzeigersinn zwischen der zuletzt verfolgten und der nächsten, durch  $r_1$  festgelegten Fließlinie?

Wenn NEIN:  $E_S$  wird das neue Nachbarsegment  $E_N$ . Weiter mit Schritt 3, danach zurück.

### Schritt 6: Ende Bearbeitung des Plattensegments

Es ist zu überprüfen, ob das Umrisspolygon des Plattensegments zum bisherigen Fließlinienmuster kompatibel ist oder ob ein Widerspruch vorhanden ist:

In Schritt 3 wird für jede erstellte Fließlinie abgespeichert, welche beiden Plattensegmente an diese Fließlinie grenzen. Es ist zu überprüfen, ob alle Fließlinien, für die das Plattensegment  $E_x$  als angrenzend vermerkt ist, auch zum Umrisspolygon des Plattensegments  $E_x$  gehören.

Wenn NEIN: Es ist ein Widerspruch aufgetreten und dieser Umriss des Plattensegments  $E_x$  ist nicht gültig. Zurück.

Wenn Ja: Weiter mit Schritt 1b, danach zurück.

### Schritt 7: Muster gefunden

Die Traglast für das Fließlinienmuster ist zu berechnen, danach zurück.

### Schritt 8: Algorithmus Ende

Wie im Beispiel in Abbildung 16.35 gezeigt wurde, können unter Umständen mehrere widerspruchsfreie Fließlinienmuster existieren. Von allen in Schritt 7 gefundenen Fließlinienmustern ist dasjenige mit der kleinsten Traglast auszuwählen und als Ergebnis zurück zu geben.

### Berechnungsaufwand

Die Berechnung erfolgt rekursiv. Für jedes ebene Plattensegment wird eine Anzahl von möglichen Fließlinienrändern geprüft.

Es ist eine Baumstruktur zu durchsuchen. Jeder Knoten stellt ein untersuchtes Plattensegment dar, jeder Ast eine mögliche Fließlinienberandung dieses Plattensegments. Wenn die Baumstruktur widerspruchsfrei (siehe Schritt 6) bis zur untersten Ebene durchsucht ist, findet man gültige Fließlinienmuster. Das wesentliche Mittel, den Rechenaufwand zu reduzieren, besteht darin, die Widersprüche möglichst frühzeitig herbeizuführen, so dass möglichst wenig Äste des Baums getestet werden müssen. Dazu werden (wie in Schritt 1b beschrieben) die Plattensegmente in einer Reihenfolge bearbeitet, bei der die Plattensegmente, bei denen ein Widerspruch am wahrscheinlichsten ist, bevorzugt untersucht werden.

## 16.3.4 Der Algorithmus an einem Beispiel

Anhand des Beispiels aus Abbildung 16.34 soll der Algorithmus teilweise nachvollzogen werden. Abbildung 16.40 zeigt das Fließlinienmuster, welches vom Programm ermittelt werden soll.

Den gesamten Berechnungsablauf zu demonstrieren, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher werden hier nur einige wesentliche Programmschritte dargestellt.

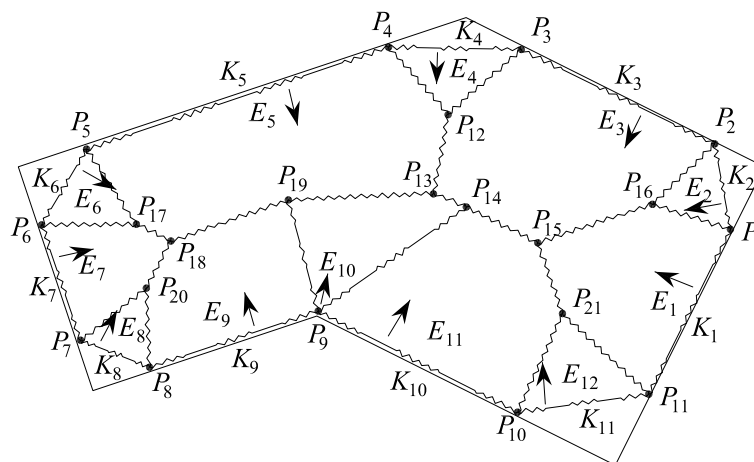


Abbildung 16.40: Sechseckplatte mit Randgruppen, Eckgruppen und inneren Fließlinien

**Schritt 1a** Per Zufallsgenerator wird ein ebenes Plattensegment für  $E_x$  ausgewählt, beispielsweise  $E_3$ .

**Schritt 2** Punkt  $P_3$  wird zum Startpunkt  $P_S$ . Endpunkt  $P_E$  ist  $P_2$ . Das Nachbarsegment  $E_N = E_4$  wurde noch nicht bearbeitet. Deshalb wird der Richtungsvektor  $r_1$  berechnet. Von den beiden Richtungsvektoren  $r_{1a}$  und  $r_{1b}$  ist nur die Richtung  $r_{1a}$  möglich, da  $r_{1b}$  aus der Platte heraus zeigt.

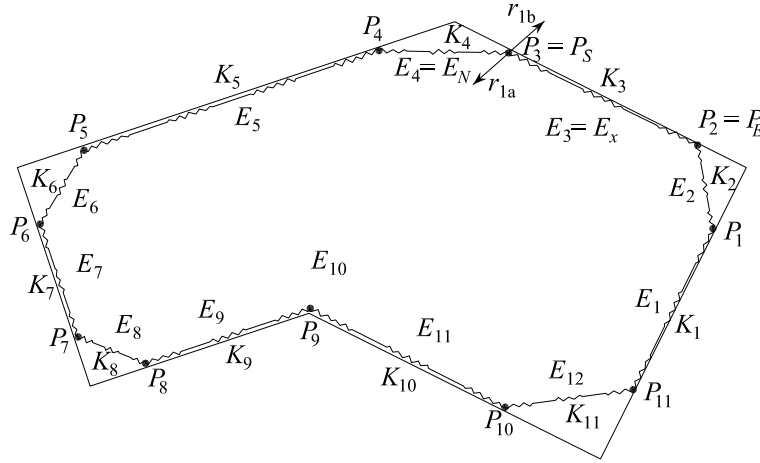


Abbildung 16.41: Sechseckplatte mit Richtungsvektoren  $r_{1a}$  und  $r_{1b}$  zwischen  $E_3$  und  $E_4$

**Schritt 3** Es gibt noch keinen weiteren Punkt auf den Plattensegmenten  $E_3$  und  $E_4$ .

Die Fließlinie zwischen  $E_3$  und  $E_4$  kann längenmäßig maximal bis zum Schnittpunkt mit Kante  $K_9$  gehen. Dadurch wird der maximale Längenfaktor  $t_{max}$  bestimmt (siehe Abbildung 16.42).

Der Schnittpunkt des Strahls von  $P_3$  mit Richtung  $r_1$  in der virtuellen Verschiebungsfigur wird auf Schnittpunkte mit den Ebenen der Plattensegmente  $E_S = E_5$  bis  $E_{12}$  und  $E_1$  bis  $E_2$  untersucht. In Abbildung 16.42 sind exemplarisch die Vektoren  $t_5 r_1$  bis  $t_8 r_1$  für die Schnittpunkte des Strahls mit den Ebenen von  $E_5$  bis  $E_8$  eingezeichnet.

Ebenen, bei denen der Längenfaktor  $t$  größer als  $t_{max}$  oder kleiner als Null ist, können gleich wieder verworfen werden. In der Abbildung wäre  $t_6 > t_{max}$ .  $t_6 r_1$  ist somit kein Vektor für eine gültige Fließlinie, da diese Fließlinie  $K_9$  schneiden würde.

Alle anderen Schnittpunkte mit  $0 < t < t_{max}$  müssen weiter untersucht werden, nicht nur derjenige mit dem kleinsten  $t$ . D.h. es ist nicht nur die kürzestmögliche Fließlinie zu betrachten, sondern auch andere Möglichkeiten für die Fließlinie zwischen  $E_3$  und  $E_4$  können relevant werden.

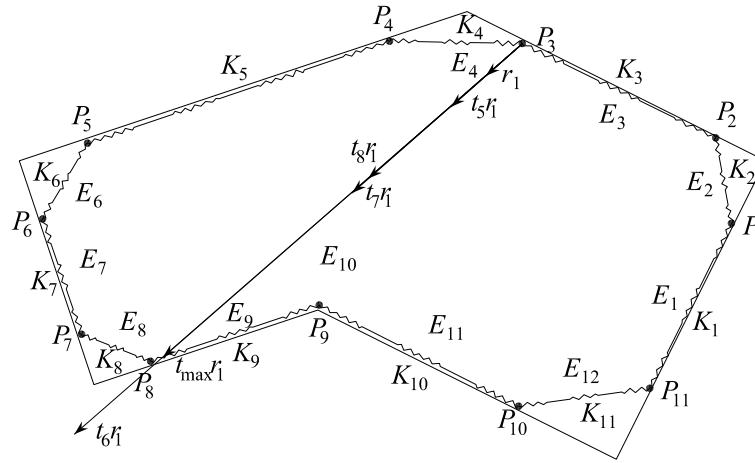


Abbildung 16.42: Sechseckplatte mit Vektoren möglicher Fließlinien zwischen  $E_3$  und  $E_4$

Als erstes wird der Schnittpunkt mit der Ebene von Plattensegment  $E_5$  im Punkt  $P_{12}$  (Abbildung 16.43) betrachtet. Der Längenfaktor  $t = t_5$  ist kleiner als  $t_{max}$ .

Damit wird  $P_{12}$  zum neuen Startpunkt  $P_S$ , Plattensegment  $E_5$  wird zum Nachbarsegment  $E_N$ . Von den beiden theoretischen Richtungsvektoren der Schnittgerade zwischen  $E_3$  und  $E_5$ ,  $r_{2a}$  und  $r_{2b}$  (Abbildung 16.43), ist wieder nur die Richtung  $r_{2a}$  möglich. Liefte die Fließlinie in Richtung  $r_{2b}$ , so ließe sich keine Fließlinie zwischen  $E_4$  und  $E_5$  angeben. Die mögliche Richtung der Fließlinie ist in der Abbildung als Strichpunktlinie dargestellt. Diese Situation ist in Abbildung 16.39 dargestellt. (Dort entspricht  $r_1$  der Fließlinie zwischen  $E_3$  und  $E_4$  und  $r_3$  der Fließlinie zwischen  $E_4$  und  $E_5$ .) Es muss also nur  $neur_1 = r_{2a}$  betrachtet werden.

**Schritt 3** Es gibt noch keinen weiteren Punkt auf den Plattensegmenten  $E_3$  und  $E_5$ .

Die Fließlinie zwischen  $E_3$  und  $E_5$  kann längenmäßig maximal bis zum Schnittpunkt mit Kante  $K_{10}$  gehen. Dadurch wird der maximale Längenfaktor  $t_{max}$  bestimmt. (Abbildung 16.44)

Der Strahl von  $P_{12}$  mit Richtung  $r_1$  wird weiterverfolgt. Die Schnittpunkte mit den Ebenen der Plattensegmente  $E_S = E_6$  bis  $E_{12}$  und  $E_1$  bis  $E_2$  in der virtuellen Verschiebungsfigur werden bestimmt. Exemplarisch sind die Vektoren zu den Schnittpunkten mit den Plattensegmenten  $E_6$  bis  $E_{10}$  in der Abbildung eingetragen.

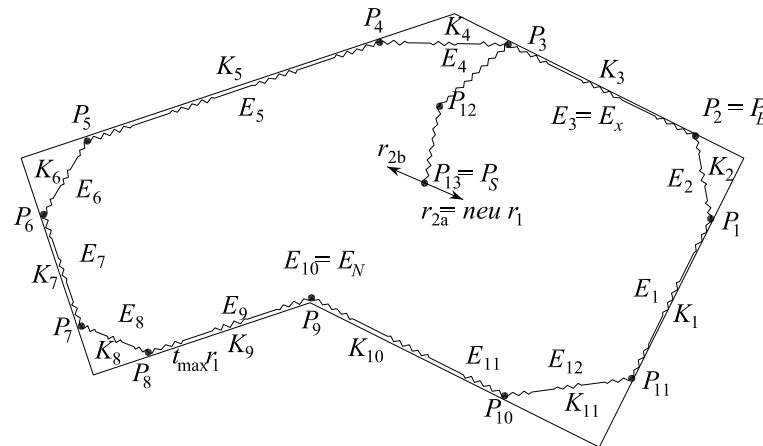
Für alle ebenen Plattensegmente wird der Längenfaktor  $t$  bis zum Schnittpunkt des Strahls  $P_{12} + t \cdot r_1$  mit dem Plattensegment in der virtuellen Verschiebungsfigur (d.h. am verformten System) bestimmt. Gilt für den Längenfaktor  $t$  die



Nacheinander werden die Schnittpunkte mit den Ebenen der Plattensegmente  $E_S = E_7, E_8$  und  $E_9$  untersucht. Diese Möglichkeiten führen jedoch alle zu einem Widerspruch. In einer der nachfolgenden Abarbeitungen von Schritt 3 wird kein Schnittpunkt gefunden, der die Bedingung  $0 < t < t_{max}$  erfüllt.

Dissertation - JÖRN WEICHERT

$P_{13}$  (Abbildung 16.45) wird zum neuen Startpunkt  $P_S$ , Plattensegment  $E_{10}$  wird zur Nachbarsegment  $E_N$ . Von den beiden theoretischen Richtungsvektoren  $r_{2a}$  und  $r_{2b}$  für den Strahl ist wieder nur die Richtung  $\text{neur}_1 = r_{2a}$  möglich.





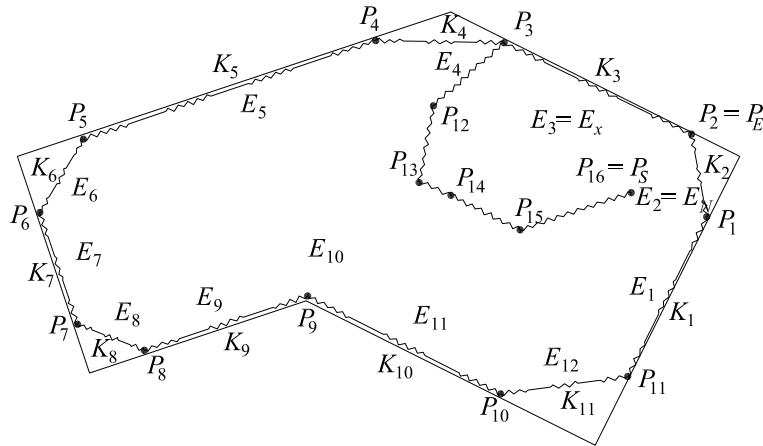
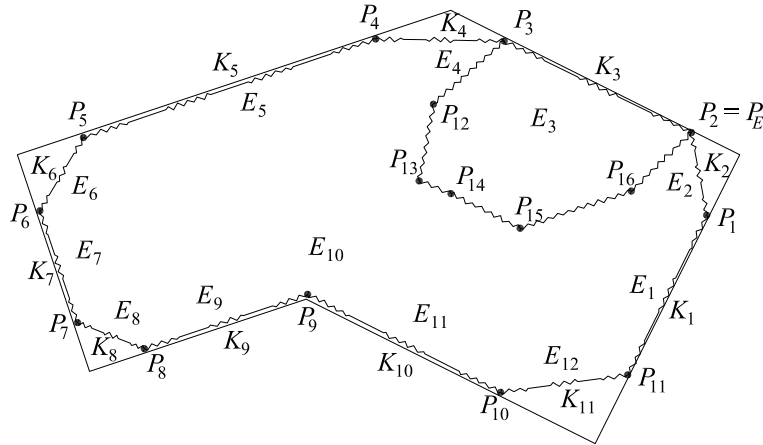


Abbildung 16.46: Sechseckplatte nach drei weiteren Abarbeitungen von Schritt 3

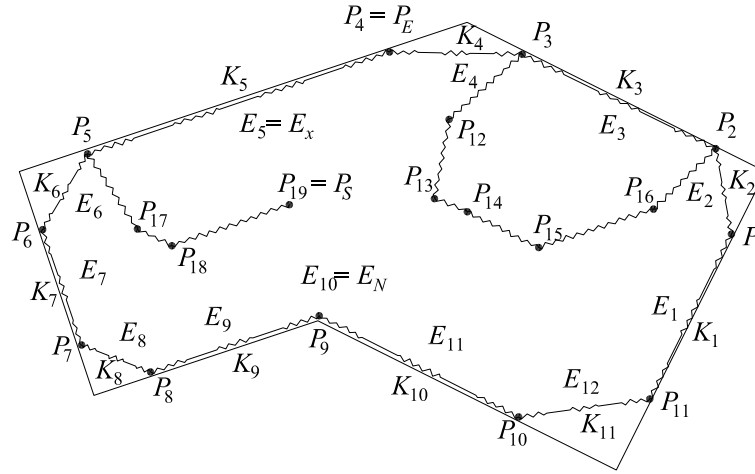

Abbildung 16.47: Sechseckplatte, Plattensegment  $E_3$  fertig

**Schritt 1b** Das nächste Plattensegment wird aus all denen ausgewählt, mit denen Plattensegment  $E_3$  eine gemeinsame Kante hat. Dies sind die Plattensegmente  $E_4$ ,  $E_5$ ,  $E_{10}$ ,  $E_{11}$ ,  $E_1$  und  $E_2$ .

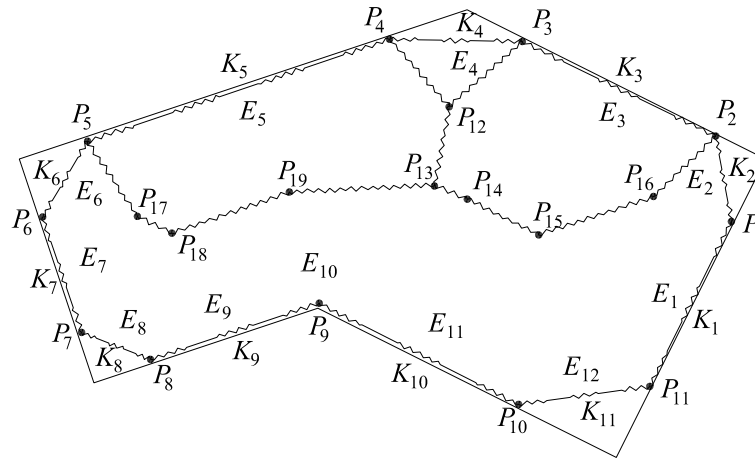
Per Zufallsgenerator wird für dieses Beispiel das Plattensegment  $E_5$  für  $E_x$  gewählt.

**etc** Nach einer wiederholter Anwendung von Schritt 3 findet man die Punkte  $P_{17}$ ,  $P_{18}$  und  $P_{19}$  (Abbildung 16.48).

Von  $P_{19}$  muss eine Fließlinie zu  $P_{13}$  verlaufen, da beide Punkte sowohl auf  $E_5$  als auch  $E_{10}$  liegen. Im Schritt 5 wird festgestellt, dass es bereits eine Fließlinie am Punkt  $P_{13}$  gibt, die zum Plattensegment  $E_5$  gehört. Diese führt zum Punkt  $P_{12}$  (Schritt 4). Danach wird erneut Schritt 5 angewendet und die Richtung der

Abbildung 16.48: Sechseckplatte, nach Bestimmung von Punkt  $P_{19}$ 

nächsten Fließlinie bestimmt. Diese führt zum Punkt  $P_4$  (Schritt 3). Dieser Punkt ist gleichzeitig der Endpunkt des Plattensegments  $E_5$  (Schritt 5). Auch dieses Plattensegment zeigt, wie in Abbildung 16.49 zu sehen ist, keinen Widerspruch zum vorhandenen Fließlinienmuster (Schritt 6).

Abbildung 16.49: Sechseckplatte, Plattensegment  $E_5$  fertig

Auf die beschriebene Art und Weise wird der Rest des Fließlinienmusters bestimmt.

Im Programm  $\mathcal{FLX}$  kann der Algorithmus ausführlich nachvollzogen werden, indem in der Eingabedatei das Attribut output im Element FLX auf einen Wert größer als 1 gesetzt wird.

### 16.3.5 Verbessern des Algorithmus

Man betrachte nochmals das Beispiel oben. Das Plattensegment  $E_3$  hat, nachdem drei Fließlinien erzeugt wurden, gemeinsame Kanten mit den Plattensegmenten  $E_4$ ,  $E_5$  und  $E_{10}$ . An dieser Stelle sieht man, dass Plattensegment  $E_3$  keine weiteren Kanten mit einem der Plattensegmente  $E_6$  bis  $E_9$  haben kann. In Schritt 3 und in Schritt 5 des Algorithmus müssen diese Plattensegmente nicht mehr untersucht werden.

Deshalb ist der Algorithmus wie folgt zu ergänzen:

Jedes mal, wenn eine neue Fließlinie erzeugt wird oder das aktuelle Plattensegment  $E_x$  um eine weitere Kante ergänzt wird (Schritt 3 und Schritt 4), wird eine zusätzliche Prozedur initiiert.

In dieser Prozedur wird das Randpolygon beginnend mit dem Plattensegment  $E_N$  durchlaufen, bis entweder (a) ein Plattensegment, welches eine gemeinsame Kante mit  $E_x$  besitzt oder (b) das Plattensegment  $E_x$  selbst gefunden ist.

Von hier ab wird jedes Plattensegment als „unmöglich“ markiert, bis man wieder zum Plattensegment  $E_N$  zurückkehrt.

(b) ist der Fall, bei dem  $E_N$  und  $E_x$  zum selben Randpolygon gehören. (a) tritt auf, wenn  $E_N$  und  $E_x$  zu verschiedenen Randpolygone gehören. Dies kann der Fall sein, wenn Öffnungen in der Platte vorhanden sind.

In Schritt 3 und in Schritt 5 (an der Stelle „Suche alle ebenen Plattensegmente  $E_S \neq E_x$ “) werden die als „unmöglich“ markierten Plattensegmente übersprungen.

## 16.4 Berechnung der Traglast

Für die Berechnung der zum Fließlinienmuster gehörenden Traglast ist zuerst die virtuelle äußere Arbeit zu bestimmen.

### virtuelle äußere Arbeit

- Für alle Punkte mit Einzellast  $P$ :
  - Bestimme das Plattensegment, auf dem sich der Punkt befindet
  - Bestimme die virtuelle Verschiebung des Plattensegment  $\delta w_P$  an der Stelle der Punktlast
  - Errechne die äußere Arbeit der Punktlast  $\delta A_{a,P} = \delta w_P P$
- Für alle Ränder mit Linienlast  $p_L$ :
  - Errechne die äußere Arbeit der Linienlast nach Abschnitt 10.1.3 und nach Abschnitt 10.2.3:  $\delta A_{a,L} = \int_L \delta w p_L ds$
- Für alle ebenen Plattensegmente mit Flächenlast  $p_A$ :
  - Errechne die äußere Arbeit der Flächenlast nach Abschnitt 11.1.2:  $\delta A_{a,L} = \int_A \delta w p_A dA$

- Summiere die äußeren Arbeiten aller Punktlasten, Linienlasten und Flächenlasten zur resultierenden äußeren Arbeit  $\delta A_a$

### innere Arbeit

Anhand der errechneten äußeren Arbeit ist zu entscheiden, ob der Ansatz für die virtuelle Verschiebungsfigur in die richtige Richtung erfolgte:

- Wenn  $\delta A_a < 0$ , dann sind alle virtuellen Relativverdrehungen, die im Folgenden berechnet werden, mit dem Faktor -1 zu multiplizieren. Die äußere Arbeit ist durch ihren Absolutbetrag  $\delta A_a$  zu ersetzen.

Unter Berücksichtigung dieses Vorzeichens ist die innere Arbeit wie folgt zu bestimmen:

- Für jede Fließlinie
  - Bestimme den Abminderungsfaktor  $cl$  des plastischen Moments nach Abschnitt 8.2, falls die Fließlinie auf einem Plattenrand liegt; für Fließlinien im Platteninneren ist  $cl = 1$
  - Finde das Grenzmoment in der Fließlinie in Abhängigkeit vom Material des Plattenbereichs, auf dem sich die Fließlinie befindet, und von der Richtung der Fließlinie
  - Berechne die innere Arbeit der Fließlinie nach Abschnitt 10.1.2:  $-\delta A_i = \int m_u^\pm(\varphi) \delta \Delta \theta ds$
- Summiere die inneren Arbeiten aller Fließlinien zur resultierenden inneren Arbeit  $-\delta A_i$ .

### Traglast

Bestimme den zum Fließlinienmuster gehörenden Traglastfaktor

$$\lambda_T = \frac{-\delta A_i}{|\delta A_a|} \quad (16.1)$$

## 16.5 Auswerten und Vereinfachen des Fließlinienmusters

Nach abgeschlossener Optimierung (siehe Abschnitt 19) eines Fließlinienmusters ist das errechnete Fließlinienmuster zu untersuchen.

Die numerischen Optimierungsalgorithmen zeigen ein sehr schlechtes Konvergenzverhalten, wenn das zu findende Minimum an einer Unstetigkeitsstelle der Zielfunktion

oder am Rand des Definitionsbereichs auftritt. Unten sind typische Fälle von Konvergenzproblemen beschrieben und wie diese zu beheben sind. Dies geht in der Regel mit einer Vereinfachung des Fließlinienmusters und einer Reduktion der Anzahl der Optimierungsparameter einher.

Das vereinfachte Fließlinienmuster ist erneut zu optimieren und gegebenenfalls weiter zu vereinfachen.

Für die Vereinfachung sind folgende Situationen zu überprüfen:

### **Randgruppe 2**

(siehe Abbildung 16.3)

*Einer der Flächeninhalte der Plattensegmente  $E_1$  oder  $E_2$  der Randgruppe wird zu Null.*

Der entsprechende Punkt  $P_1$  bzw.  $P_2$  wird auf den Plattenrand gelegt. Damit ändert sich der Punkttyp dieses Punktes von  $kp_4$  nach  $kp_2$  oder von  $kp_2$  nach  $kp_0$ . Gleichzeitig kann das Dummy-Plattensegment  $E_1$  bzw.  $E_2$  entfallen.

Wenn beide Flächeninhalte von  $E_1$  und  $E_2$  gleichzeitig zu Null werden, so geht die Randgruppe 2 in die Randgruppe 1 über. Da diese separat untersucht wird, kann in diesem Fall eine weitere Untersuchung entfallen.

### **Randgruppe 4**

(siehe Abbildung 16.6)

*Der Flächeninhalt des Plattensegments  $E_{x1}$  der Randgruppe wird zu Null.*

Die Randgruppe 4 geht in die Randgruppe 3 über. Da diese separat untersucht wird, kann in diesem Fall eine weitere Untersuchung entfallen.

### **Eckgruppe $TypA = 11$ / $TypB = 1$**

(siehe Abschnitt 16.7)

*Der Flächeninhalt des Plattensegments  $E_1$  oder  $E_{x1}$  der Eckgruppe wird zu Null.*

In dieser Plattenecke tritt kein Eckfächer auf.

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  werden auf den Eckpunkt gelegt und erhalten den Punkttyp  $kp_0$ . Die Plattensegmente  $E_1$  und  $E_x$  werden aus dem Modell entfernt.

### **Eckgruppe $TypA = 13$ / $TypB = 1$**

(siehe Abschnitt 16.7)

*Der Flächeninhalt des Plattensegments  $E_1$  oder  $E_{x1}$  der Eckgruppe wird zu Null.*

In dieser Plattenecke tritt kein Eckfächer auf.

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  werden auf den Eckpunkt gelegt und erhalten den Punkttyp  $kp_0$ . Die Plattensegmente  $E_1$  und  $E_x$  werden aus dem Modell entfernt.

### **Einzellasten**

*Eine Einzellast befindet sich auf einer Fließlinie zwischen zwei Plattensegmenten oder an einem Schnittpunkt von mehreren Fließlinien.*

Alle Plattensegmente, die an diesem Punkt angrenzen, werden in ihrer Lage fixiert. Dazu werden alle Optimierungsparameter, die die Lage dieser Plattensegmente beeinflussen, als konstant gesetzt.

Diese Vereinfachung darf erst dann durchgeführt werden, wenn keine andere Vereinfachung mehr möglich ist.

## 17 Phase 2

In der zweiten Phase werden Fließlinienmuster untersucht, die über mehrere Plattenbereiche verlaufen.

Die Ansätze für die Fließlinienmuster entsprechen denen aus Phase 1. Um jedoch Rechenzeit zu sparen, werden die Ergebnisse aus Phase 1 für die Phase 2 verwendet.

### 17.1 Auswahl der Plattenbereiche

In der Plattendefinition können mehrere Plattenbereiche angegeben werden, die beispielsweise unterschiedliche Versagensmomente aufweisen, unterschiedlich belastet sind, oder einfach durch Unterzüge/Steifen oder Wände/kontinuierliche Stützungen voneinander getrennt sind.

Fließlinienmuster können in einem einzelnen dieser Plattenbereiche auftreten oder sich über mehrere Plattenbereiche erstrecken. Dementsprechend muss auch jeder Plattenbereich einzeln untersucht werden, sowie jede mögliche Kombination von mehreren Plattenbereichen betrachtet werden.

In Phase 1 werden nur die einzelnen Plattenbereiche berechnet und jeweils das maßgebende Fließlinienmuster bestimmt. Aus diesen errechneten Fließlinienmustern werden in Phase 2 die Fließlinienmuster für die zusammengesetzten Plattenbereiche kombiniert.

Für eine Platte mit  $n$  Plattenbereichen gibt es prinzipiell  $2^n - 1$  Kombinationsmöglichkeiten, mindestens einen Plattenbereich auszuwählen. Jede dieser Kombinationen von Plattenbereichen ist zu untersuchen. Da zusätzlich gefordert werden kann, dass die ausgewählten Plattenbereiche eine zusammenhängende Region ergeben, wird diese Anzahl jedoch reduziert. Ebenso können Kombinationen entfallen, die aus nur einem einzelnen Plattenbereich bestehen. Diese wurden bereits in Phase 1 untersucht. Bedenkt man, dass der Rechenaufwand in etwa exponentiell mit der Anzahl der Plattenbereiche steigt, sollte das System so idealisiert werden, dass die Anzahl der Plattenbereiche möglichst gering ist.

### 17.2 Aufbau des Fließlinienmusters

Der Aufbau des Fließlinienmusters in Phase 2 erfolgt analog zu Phase 1. Die Rand- und Eckgruppen sind identisch mit denen aus der ersten Phase.

Der wichtigste Unterschied der Fließlinienmuster aus Phase 1 und 2 besteht darin, dass das Fließlinienmuster in Phase 2 mehrere Randpolygone besitzen kann.

In Abbildung 17.1 ist eine Platte dargestellt, die aus drei Plattenbereichen besteht. Die äußeren Ränder der Platte sind gelenkig gelagert. In den Plattenbereichen 1 und 2 wirkt eine konstante Flächenlast nach unten, im Plattenbereich 3 eine Flächenlast nach oben.

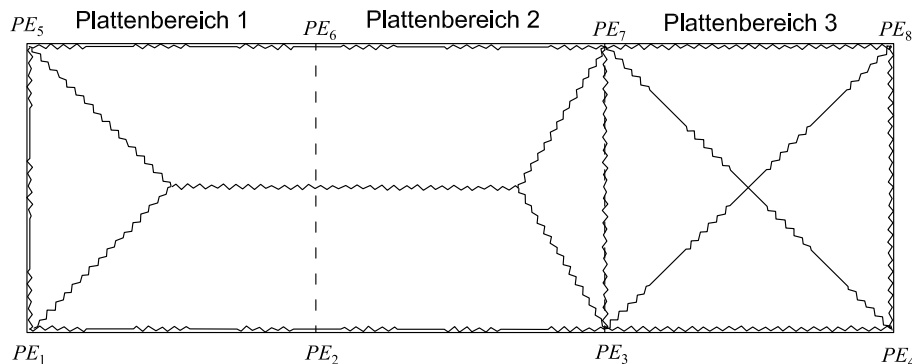


Abbildung 17.1: Prinzip-Beispiel zu Phase 2

In Phase 1 wurde für jeden der Plattenbereiche eine Berechnung durchgeführt. Die Plattenbereiche 1 und 2 zeigten in Phase 1 ein Fließlinienmuster mit positiven Fließlinien im Platteninneren. Plattenbereich 3 hat aufgrund einer entgegengesetzt gerichteten Belastung ein Fließlinienmuster mit negativen Fließlinien im Platteninneren.

In Phase 2 müssen die kombinierten Plattenbereiche 1-2, 2-3 und 1-2-3 untersucht werden. Die Kombination von Plattenbereich 1 mit 3 ist in diesem Fall nicht zu berechnen.

Für die in Abbildung 17.1 dargestellte Kombination aller drei Plattenbereiche entstehen zwei äußere Randpolygone. Das eine umfasst die Plattenbereiche 1 und 2, das zweite umfasst den Plattenbereich 3. Am Rand  $PE_3 - PE_7$  haben diese beiden Polygone eine gemeinsame Kante.

Beim Erstellen des Fließlinienmusters werden auch in Phase 2 die in Abschnitt 16.2 beschriebenen Eckgruppen und Randgruppen verwendet.

Während in Phase 1 jedoch für jeden Rand jede in Frage kommende Randgruppe getestet wurde, wird in Phase 2 für jeden Rand nur diejenige Randgruppe benutzt, bei der sich in Phase 1 die minimale Traglast ergab. Für die Eckgruppen werden, soweit möglich, ebenfalls Ergebnisse aus Phase 1 verwendet.

Die Anfangslage der Kontrollpunkte und die virtuellen Verdrehungen der ebenen Plattensegmente werden nicht über einen Zufallsgenerator initialisiert, sondern es werden direkt die Werte aus der ersten Phase übernommen. Auch Vereinfachungen des Fließlinienmusters in Phase 1 (siehe Abschnitt 16.5) werden direkt für Phase 2 übernommen.



Beim Beispiel aus Abbildung 17.1 können die Eckgruppen der Ecken  $PE_1$ ,  $PE_4$ ,  $PE_5$  und  $PE_8$  aus der ersten Phase übernommen werden, da an diesen Eckpunkten im kombinierten Plattenbereich nur einer der drei einzelnen Plattenbereiche angrenzt. Die übrigen Eckgruppen, bei denen mehrere Plattenbereiche angrenzen, müssen neu erstellt werden. Bei den Eckgruppen an Ecke  $PE_3$  und  $PE_7$  ist zusätzlich zu beachten, dass dort jeweils zwei Eckgruppen auftreten, für jeden Plattenbereich eine. Die Punkte auf der Kante  $PE_3 - PE_7$  müssen dabei für beide Eckgruppen übereinstimmen.

## 17.3 Berechnen der Traglast

Für die Berechnung der Traglast in Phase 2 muss das Fließlinienmuster vorab auf die Überschneidung mit den Plattenbereichen überprüft werden:

- Fließlinien können sich über mehrere Plattenbereiche (auch mit unterschiedlichen plastischen Momenten) erstrecken. Die Fließlinie ist an der Grenze der Plattensegmente zu unterteilen, und die innere Arbeit ist für jeden Teil der Fließlinie mit den jeweiligen plastischen Momenten zu bestimmen. Für alle Fließlinien sind daher vorab die Schnittpunkte mit den inneren Plattenrändern zu bestimmen.
- Plattensegmente können sich auch über mehrere Plattenbereiche mit unterschiedlichen Belastungen erstrecken. Dies ist bei der Berechnung der äußeren Arbeit zu Berücksichtigen. (siehe Abschnitt 11.1.2)

Abgesehen von diesen Besonderheiten entspricht die Berechnung der Traglast für Phase 2 dem Vorgehen nach Phase 1 (Abschnitt 16.4).



## 18 Phase 3

### 18.1 Auswahl der Fließlinienmuster

In Phase 1 und 2 wurden nur ebene Plattensegmente benutzt. Auch an den Stellen, an denen im Traglastzustand Fließlinienfächer zu erwarten sind, wurden vorerst ebenfalls ebene Segmente als Näherung eingesetzt. In der Phase 3 werden jetzt diese ebenen Ersatz-Segmente durch die in Abschnitt 11.2 beschriebenen Fächersegmente ersetzt.

Für verschiedene Fließlinienmuster kann die Auswirkung der Fächer auf die Traglast unterschiedlich ausfallen. Daher genügt es nicht, einfach nur das Fließlinienmuster mit der kleinsten Traglast aus Phase 1 und 2 auszuwählen und an allen möglichen Stellen durch Fächersegmente zu ergänzen. Pauschal alle bisher bestimmten Fließlinienmuster weiter auszuwerten, würde andererseits einen unnötig hohen Rechenaufwand verursachen.

In den untersuchten Beispielen sank die Traglast nach Einfügen der Fächer in keinem Fall um mehr als 20%. Daher wird empfohlen (und in dem zu dieser Arbeit entwickelten Programm *FLX* praktiziert), alle diejenigen Fließlinienmuster der ersten beiden Phasen weiter zu untersuchen, deren zugehörige Traglast nicht mehr als das 1.5-fache der minimalen bisher bestimmten Traglast beträgt.

### 18.2 Einfügen der Fächer

#### 18.2.1 Schritt 1: Vorbereiten des Fließlinienmusters

Die verwendeten Fächersegmente sind im Vergleich zu den ebenen Plattensegmenten topologisch unflexibel. Das heißt, eine einmal vorgegebene Form kann nicht zwischen Dreiecks- bzw. Vierecksfächer wechseln. Um Änderungen in der Topologie des Fließlinienmusters zu verhindern, wird vor dem Einfügen der Fächersegmente die Lage aller ebenen Plattensegmente fixiert, so dass in Phase 3 nur noch die Fächersegmente optimiert werden.

Die ebenen Plattensegmente können in Phase 3 noch ihren Umriss an den Rändern ändern, an denen sie an ein Fächersegment grenzen. Die Lage der Ebene bleibt jedoch unveränderlich. Dazu werden alle Freiheitsgrade des Fließlinienmusters deaktiviert. Diejenigen Freiheitsgrade, welche die Fächergeometrie beeinflussen, werden später wieder aktiviert.

Weiterhin ist als Vorbereitung für Phase 3 das Fließlinienmuster wie folgt zu vereinfachen:

- Innere Punkte des Fließlinienmusters (Punkttyp kp5), die mit Eckpunkten der Platte zusammenfallen (z.B. unter Einzellasten), werden auf diesen Punkt fixiert. Sie erhalten den Punkttyp kp9.
- Punkte am Rand des Fließlinienmusters, die mit Eckpunkten der Platte zusammenfallen, werden auf diesen Punkt fixiert. Sie erhalten den Punkttyp kp0.
- Durch numerische Ungenauigkeiten bei Konvergenz des Optimierers in den ersten beiden Phasen können sehr kurze Fließlinien entstehen. Diese sehr kurzen Fließlinien sind zu entfernen und ihre beiden Endpunkte zusammenzufassen. (Im Programm  $\mathcal{FLX}$  wird als Grenzlänge dieser sehr kurzen Fließlinien der  $10^{-3}$ -fache Wert der kleinsten Plattenabmessung angenommen).

### 18.2.2 Schritt 2: Auswahl der Plattensegmente

Folgende ebenen Plattensegmente aus Phase 1 und Phase 2 sind durch Fächer zu ersetzen:

- die Ebenen  $E_{x1}$  bis  $E_{x3}$  aller Eckgruppen (soweit vorhanden)
- die Ebene  $E_x$  der Randgruppe 2

Die hier verwendeten Fächersegmente besitzen stets vier Ränder. Durch Verkürzen eines Randes zu einem Punkt wird ein Fächer in Dreiecksform erzeugt.

Für ebene Plattensegmente aus drei Fließlinien und für vierseitige konvexe Plattensegmente genügt ein einziges Fächersegment um das ebene Plattensegment zu ersetzen.

Alle anderen Plattensegmente, d.h. solche mit mehr als vier Fließlinien und vierseitige nicht konvexe Plattensegmente, benötigen mehrere Fächersegmente. Das Umrisspolygon dieser ebenen Plattensegmente muss in Dreiecke zerlegt werden. Die so entstehenden dreieckigen Plattensegmentabschnitte werden durch jeweils einen Fächer ersetzt.

### 18.2.3 Schritt 3: Umwandeln der Ränder

Die Fließlinien des Plattensegments, das in einen Fächer umgewandelt werden soll, sind in der Regel gerade Fließlinien. Falls das Nachbarsegment bereits in ein Fächersegment umgewandelt wurde, können jedoch auch Fließlinien in Spline-Form auftreten. Die geraden Fließlinien müssen durch einen zusätzlichen Kontrollpunkt in eine gekrümmte Fließlinie umgewandelt werden (Abbildung 18.1). Der zusätzliche Kontrollpunkt wird in der Mitte der Fließlinie eingefügt. Der geometrische Verlauf der gekrümmten Fließlinie in Abbildung 18.1 entspricht damit dem Verlauf der geraden Linie, jedoch

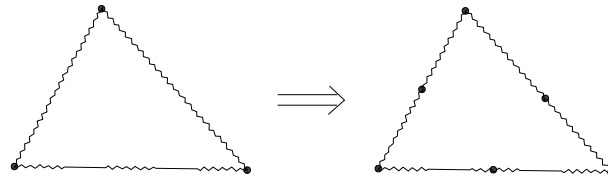


Abbildung 18.1: Ersetzen der geraden Fließlinien durch gekrümmte Fließlinien

ist die Definition jetzt keine reine Gerade mehr, sondern ein Spline, bei dem die drei Kontrollpunkte auf einer Linie liegen.

Für den zusätzlichen Kontrollpunkt gibt es vier mögliche Fälle:

- **Fall 1: Die Fließlinie befindet sich zwischen zwei Plattensegmenten.** Der neue Kontrollpunkt muss vom Typ kp7 sein, der Punkt muss auf der Nachbarebene liegen. Der Punkt erhält einen Formparameter  $ws$  (Zu Beginn wird  $ws = 1.0$  gesetzt).
- **Fall 2: Falls ein Nachbarsegment bereits ein Fächersegment ist,** so ist die Fließlinie an diesem Nachbarsegment bereits eine gekrümmte Fließlinie. Der Punkttyp des mittleren Punktes ist kp7 mit dem aktuell bearbeiteten Plattensegment als Lagereferenz. Dieser Punkt wird in den Punkttyp kp8 umgewandelt.
- **Fall 3: Die Fließlinie befindet sich am Rand des Fließlinienmusters, die virtuelle Vertikalverschiebung beider Punkte ist Null.** Der Start- und Endpunkt der Fließlinie müssen beide vom Typ kp0, kp2, oder kp4 sein. Der neue Kontrollpunkt darf ebenfalls keine virtuelle Verschiebung bekommen und muss somit vom Typ kp4 sein. Auch dieser Punkt hat einen Formparameter  $ws$ .
- **Fall 4: Die Fließlinie befindet sich am Rand des Fließlinienmusters, die virtuelle Vertikalverschiebung mindestens eines der Punkte ist nicht Null.** Dieser Fall tritt bei Fließlinien am verschieblichen Plattenrand auf. Der neue Kontrollpunkt muss ebenfalls auf diesem Plattenrand liegen und besitzt eine virtuelle Verschiebung. Er muss somit vom Typ kp3 sein. Dieser Punkt erhält ebenfalls einen Formparameter  $ws$ .

#### 18.2.4 Schritt 4: Umwandeln der Punkte

Die Punkte an den Enden der Fließlinien müssen ebenfalls in einen neuen Punkttyp überführt werden (Tabelle 18.1). Für diese Punkte werden die Freiheitsgrade gemäß ihrem neuen Punkttyp wieder aktiviert (siehe Tabelle 15.1 auf Seite 100). Keiner dieser Punkte hat einen Formparameter  $ws$ .

alter Typ	neuer Typ	Nebenbedingung / Kommentar
kp0	kp0	unverändert
kp1	kp1	unverändert
kp2	kp2	unverändert
kp3	kp3	unverändert, wenn es außer $E_F$ und den vertikalen Dummy-Segmenten kein weiteres ebenes Plattensegmente an diesem Punkt gibt
	kp11	wenn es außer $E_F$ und den vertikalen Dummy-Segmenten noch ein weiteres ebenes Plattensegmente an diesem Punkt gibt; der Punkt erhält die Nachbarsegment von $E_F$ als Referenzebene
kp4	kp4	unverändert
kp5	kp5	unverändert, wenn es außer $E_F$ noch drei oder mehr ebene Platten-segmente an diesem Punkt gibt
	kp6	wenn es außer $E_F$ noch zwei weitere ebene Plattensegmente an diesem Punkt gibt
kp6	kp7	Punkt erhält die Nachbarsegment von $E_F$ als Referenzebene
kp7	kp8	Punkt hat $E_F$ als Referenzebene; ein anderer Fall kann nicht auftreten
kp8	kp8	unverändert
kp9	kp1	Punkt hat $E_F$ als Referenzebene; ein anderer Fall kann nicht auftreten
kp10	kp11	Punkt erhält die Nachbarsegment von $E_F$ als Referenzebene
kp11	kp3	Punkt hat $E_F$ als Referenzebene; ein anderer Fall kann nicht auftreten

Tabelle 18.1: Umwandlung der Kontrollpunkt-Typen

In Tabelle 18.1 kennzeichnet  $E_F$  das ebene Plattensegment, das in einen Fächer umgewandelt werden soll.

### 18.2.5 Schritt 5: Einsetzen des Fächers

Vor dem Einsetzen des Fächers ist noch ein zusätzlicher Kontrollpunkt in der Mitte des Fächers einzufügen. Dieser wird der Punkt  $P_{1,1}$  des Fächers. Er ist vom Punkttyp kp8 und besitzt einen Formparameter  $ws$ .

Ein vierseitiger Fächer besitzt acht Kontrollpunkte am Rand und einen in der Mitte. Die acht Randkontrollpunkte erhält man von den vier gekrümmten Fließlinien am Fächerrand. Der innere Kontrollpunkt wurde soeben erstellt.

Ein dreiseitiger Fächer ist prinzipiell ein vierseitiger Fächer, bei dem die drei Kontrollpunkte eines Randes in einem Punkt zusammenfallen. Einer der drei Eckpunkte, die sich aus den Randfließlinien ergeben ist also dreifach zu verwenden. Dazu ist derjenige Punkt auszuwählen, an dem eine Konzentration der Fließlinien stattfindet. Bei dreiseitigen Fächern an Einzellasten und an einspringenden Ecken ist dies der Punkt unter der Einzellast bzw. der Punkt an der einspringenden Ecke. Für Eckfächer in konvexen Plattenecken ist das der Punkt, der nicht auf dem Rand liegt.





## 19 Numerische Optimierung

Der Traglastfaktor  $\lambda_T$  ist eine nichtlineare Funktion der Optimierungsparameter  $p_i$ . Gesucht wird das Minimum:

$$\min_{p \in \mathcal{D}_p} \lambda_T(p) \quad (19.1)$$

Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}_p$  der Zielfunktion ist dadurch gegeben, dass sich aus den Optimierungsparametern ein gültiges Fließlinienmuster ergibt. Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}_p$  lässt sich jedoch nicht explizit angeben.

Im Wesentlichen kann der Definitionsbereich durch zwei Bedingungen beschrieben werden:

1. **Alle Flächen im Grundriss sind nichtnegativ.**
2. **Alle Fließlinien befinden sich im Platteninneren oder auf dem Plattenrand.**

Aus diesen beiden Bedingungen auf konkrete Grenzen für die Parameter  $p_i$  zurückzuschließen ist jedoch nicht allgemein möglich. Daher gehen die Bedingungen als Nebenbedingung in den Optimierungsprozess ein.

Bedingung 1 ist für ebene Plattensegmente erfüllt, wenn der Flächeninhalt des Plattensegments im Grundriss positiv ist, und die Ränder bis auf die gemeinsamen Eckpunkte keine Schnittpunkte aufweisen.

Für Fächersegmente ist Bedingung 1 erfüllt, wenn an jedem Punkt des Fächers das infinitesimale Flächenstück  $dA = (y_{,t_1} x_{,t_2} - y_{,t_2} x_{,t_1}) dt_2 dt_1 \geq 0$  ist (siehe Abschnitt 11.2.2 zur Gültigkeit der Splineflächen). Es kann davon ausgegangen werden, dass dies erfüllt ist, wenn  $dA$  für jeden Integrationspunkt positiv ist.

Durch die Zuordnung der Fließlinien zu den Rand- und Eckgruppen ist Bedingung 2 erfüllt, wenn sich alle Kontrollpunkte einer Fließlinie im Platteninneren befinden. Der Bedingung 2 wird dadurch genüge getan, dass zusätzliche Dummy-Plattensegmente (siehe Abbildung 16.3) für die Randgruppen eingefügt werden. Für diese darf der Flächeninhalt nicht negativ werden. Somit wird die Bedingung 2 in die Bedingung 1 überführt.

Die zu überprüfenden Bedingungen lassen sich wie folgt klassifizieren:

- **Für alle ebenen Plattensegmente muss der Flächeninhalt  $\geq 0$  sein.** Da die Anzahl der ebenen Plattensegmente konstant ist, kann diese Bedingung als herkömmliche, nichtlineare Nebenbedingung in die Optimierung eingehen.

- **Für alle Fächer muss an jedem Integrationspunkt der Flächeninhalt  $dA \geq 0$  sein.** Da die Anzahl der Integrationspunkte nicht konstant ist, ist eine Formulierung als herkömmliche Nebenbedingung nicht möglich. Sollte also  $dA < 0$  auftreten, so sind die Eingangsparameter als ungültig zurückzuweisen.
- **Es darf keine überkreuzenden Fließlinien geben.** Auch diese Bedingung lässt sich nicht als herkömmliche Nebenbedingung formulieren. Auch hier sind die Eingangsparameter als ungültig zurückzuweisen.
- **Es lässt sich zu den Parametern kein Fließlinienmuster finden.** Die Eingangsparameter sind als ungültig zurückzuweisen.

Wie gezeigt lassen sich nicht alle für die Überprüfung der Gültigkeit eines Fließlinienmusters notwendigen Bedingungen als Nebenbedingung für den Optimierungsalgorithmus formulieren. In einigen Fällen müssen die Eingangsparameter als ungültig zurückgewiesen werden. In diesem Fall liegen die Optimierungsparameter außerhalb des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}_p$ . Bei der Auswahl eines numerischen Optimierers ist daher darauf zu achten, dass der Optimierungsalgorithmus auf solche Situationen angemessen reagieren kann.

Typische Situationen, in denen Schwierigkeiten in der numerischen Optimierung beim Auffinden des Minimums auftreten, sind:

1. Das Minimum liegt am Rande des Definitionsbereichs.
2. An der Stelle des Minimums ist die Zielfunktion unstetig.
3. An der Stelle des Minimums ist die Ableitung der Zielfunktion unstetig.
4. Es treten lokale Minima auf, so dass der Optimierungsalgorithmus möglicherweise nicht das globale Minimum findet.

Unter den genannten Umständen sind die verfügbaren Optimierungsalgorithmen nicht immer in der Lage, das Minimum der Zielfunktion zuverlässig zu finden. Daher sind zusätzliche Mechanismen vorzusehen, die in diesen Fällen in den Optimierungsprozess eingreifen.

**zu 1.** Dieser Fall tritt beispielsweise auf, wenn die Eckfächer einer konvexen Plattenecke mit gelenkiger Lagerung verschwinden (siehe zum Beispiel Eckgruppe  $TypA = 11$  /  $TypB = 1$  auf Seite 110). Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  wandern in die Ecke zu Punkt  $P_3$ .

Dieser Fall tritt ebenfalls auf, wenn sich die Punkte der Randgruppe 2 (siehe Seite 105) nach außen zum Plattenrand verschieben.

In diesen Fällen ist das System so zu modifizieren, wie im Abschnitt 16.5 (Vereinfachen des Fließlinienmusters) beschrieben.

**zu 2.** Dieses Problem tritt im Beispiel 7 im Lagerungsfall 2 (Abschnitt 20.7.3) auf. Abbildung 20.48 zeigt die Zielfunktion, deren Minimum zu finden ist. Diesem Problem

---

kann man nicht durch zusätzliche Maßnahmen begegnen. Die Qualität des Ergebnis hängt von der Leistungsfähigkeit des verwendeten Optimierungsalgorithmus ab.

**zu 3.** Eine solche Unstetigkeit tritt stets auf, wenn sich Einzellasten auf der Platte befinden. Wenn sich eine Fließlinie genau unter einer Einzellast befindet, so ist die Ableitung der Zielfunktion nicht bestimmt. Je nachdem, welchem der angrenzenden Plattensegmente die Einzellast zugeordnet wird, ergeben sich unterschiedliche Werte für die Ableitungen.

Die Folge ist, dass der Optimierungsalgorithmus das Minimum in der falschen Richtung sucht. Dadurch konvergiert der Optimierungsprozess nur sehr langsam oder gar nicht gegen das Minimum.

Durch die in den Abschnitten 16.5 und 18.2.1 beschriebenen Maßnahmen für Einzellasten wird erkannt, wenn eine Konzentration von Fließlinien unter einer Einzellast auftritt, und das System wird entsprechend angepasst. Dadurch kann die Unstetigkeit beseitigt werden.

**zu 4.** Die in der numerischen Optimierung übliche Methode, die Wahrscheinlichkeit eines falschen lokalen Minimums zu reduzieren, besteht darin, den Optimierungslauf mehrmals zu starten. Dabei sind die Parameter zu Beginn von Phase 1 in einem sinnvollen Bereich zu variieren. Dies sollte dadurch geschehen, dass die Anfangsparameter per Zufallsgenerator einer Streuung unterworfen werden. Pauschal gilt, dass ein „besserer“ Optimierungsalgorithmus (d.h. ein Algorithmus, der mit weniger Schritten auskommt) anfälliger ist, in ein lokales Minimum zu geraten.

Im Programm *FLX* stehen zwei Optimierungsalgorithmen zur Auswahl. Zum einen wurde der DONLP2-Algorithmus von Prof. Dr. P. Spellucci in das Programm aufgenommen. Dieser basiert auf den Methoden der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) und verwendet Subproblem-Technologien im Falle von nicht-linearen Randbedingungen. Für Details zum Algorithmus sei auf [50] verwiesen.

Zusätzlich wurde ein Variable-Metric-Algorithmus (VM) implementiert, der auf der quasi-Newton Methode basiert. Dieser Algorithmus wird im Buch „Numerical Recipes“ beschrieben. Auch hier sei für Details zum Algorithmus die Literatur [17] empfohlen.

Der VM-Algorithmus konvergiert in der Regel langsamer als der DONLP2-Optimierungsalgorithmus, verhält sich aber im Bereich von Unstetigkeiten wesentlich gutmütiger. So benötigt der VM-Algorithmus im Beispiel 1 Variante 1 (siehe Abschnitt 20.1) durchschnittlich 5800 Funktionsaufrufe (d.h. 5800 mal wird die Traglast eines Fließlinienmusters berechnet) und 240 Berechnungen der ersten Ableitungen. Der DONLP-Algorithmus kommt mit 1200 Funktionsaufrufen und 330 Ableitungsrechnungen aus.



## 20 Beispiele

Zur Überprüfung des entwickelten Verfahrens werden einige ausgewählte Beispiele vorgestellt. Die Ergebnisse werden anhand von bekannten analytischen Lösungen aus der Literatur verifiziert.

Im Programm *FLX* wurde der hier beschriebene Algorithmus für die Berechnung von Platten nach der Fließlinientheorie umgesetzt. Die Benutzung des Programms *FLX* und der Aufbau der Eingabedatei ist im Anhang A beschrieben.

### 20.1 Beispiel 1: Quadratplatte mit konstanter Flächenlast

#### 20.1.1 Aufgabenstellung

Untersucht wird eine Quadratplatte mit unterschiedlichen Randbedingungen. Die Quadratplatte ist eines der am ausführlichsten untersuchten statischen Systeme in der Fließlinientheorie. Deshalb wird die Quadratplatte auch hier als erstes Beispiel gewählt.

Eine allseitig gelagerte Quadratplatte wird durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast  $p$  belastet. Das plastische Moment  $m_u^+ = -m_u^- = m_u$  ist in allen Richtungen gleich.

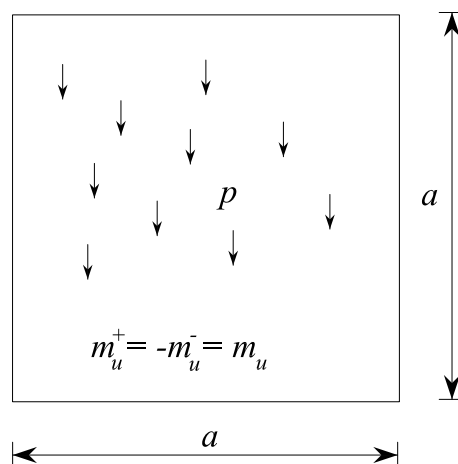


Abbildung 20.1: Beispiel Quadratplatte - System und Belastung

**Variante 1** Die Platte ist allseitig gelenkig gelagert.

**Variante 2** Die Platte ist allseitig eingespannt.

**Variante 3** Die Platte ist allseitig gelenkig gelagert, jedoch  $m_u^- = 0$ .

### 20.1.2 Variante 1 - gelenkige Lagerung

#### Analytische Lösung

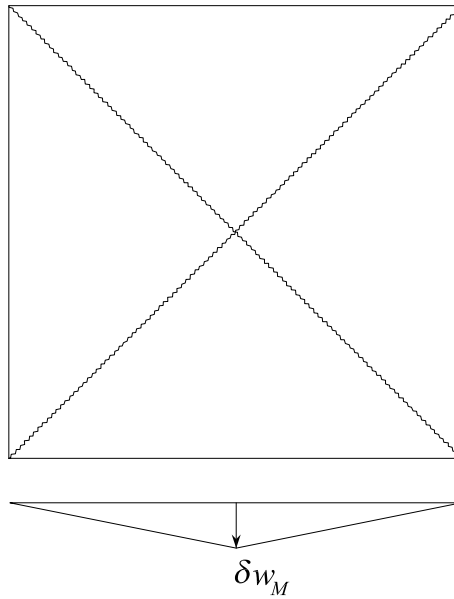


Abbildung 20.2: analytische Lösung, Fließlinienmuster mit virtueller Verschiebungsfigur

Das maßgebende Fließlinienmuster besteht aus vier positiven, geraden diskreten Fließlinien, die sich im Mittelpunkt des Quadrates treffen.  $\delta w_M$  ist die virtuelle Verschiebung in Plattenmitte. Die virtuellen Arbeitsanteile errechnen sich zu:

$$\delta A_a = 4 \cdot p \cdot \frac{\delta w_M}{3} \cdot \frac{a^2}{4} = \delta w_M p \frac{a^2}{3} \quad (20.1)$$

$$-\delta A_i = 4 \cdot m_u^+ \frac{\delta w_M}{\frac{a}{2}} \cdot a = \delta_M 8 m_u \quad (20.2)$$

Man erhält als Traglastfaktor aus Gleichung 3.2:

$$\lambda_T = 24 \frac{m_u}{p a^2} \quad (20.3)$$

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet für  $p = 1$  und  $a = 1$  sowie  $m_u = 1$  einen Traglastfaktor (siehe Abbildung 20.3) von

$$\lambda_T = 24.000 \quad (20.4)$$

Das Ergebnis stimmt mit der analytischen Lösung überein.

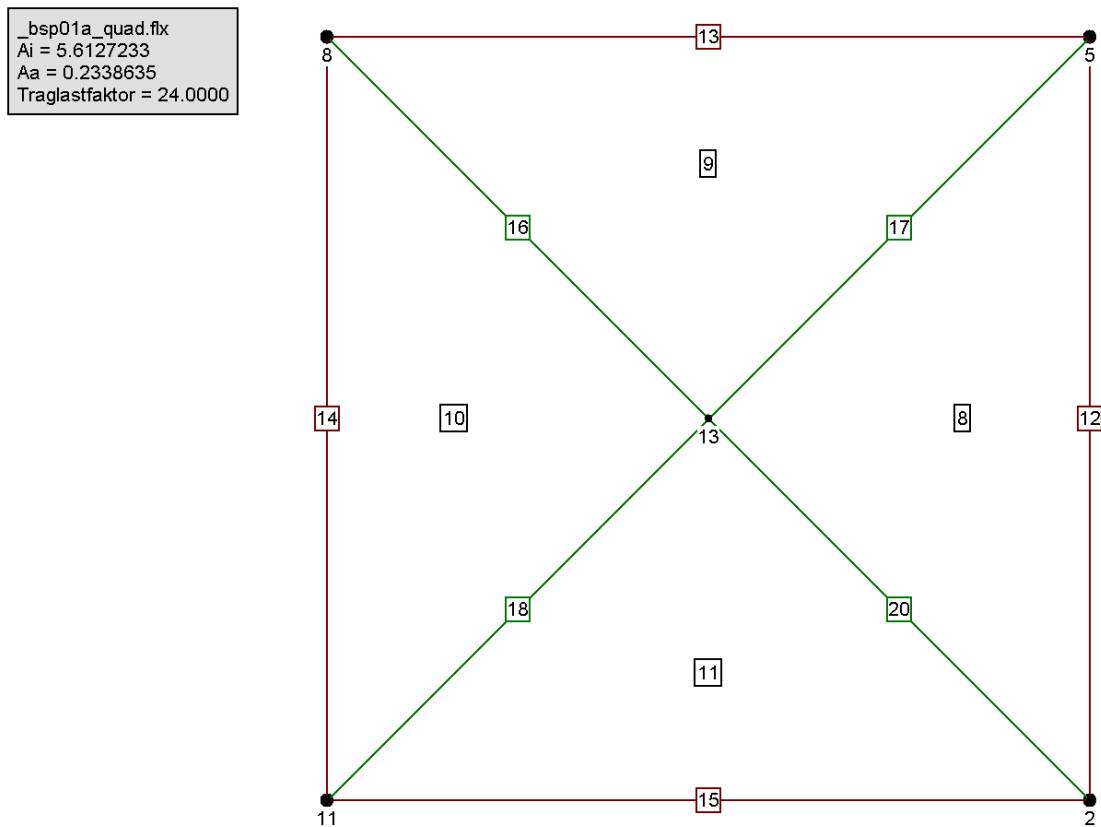


Abbildung 20.3: Fließlinienmuster zu Variante 1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Die wichtigsten Eckdaten der Berechnung des Programms  $\mathcal{FLX}$  am Ende der Phase 1 sind:

Platte erfolgreich berechnet.  
 Anzahl freier Parameter für Optimierung: 4  
 innere Arbeit  $A_i = 5.6127233$   
 äußere Arbeit  $A_a = 0.2338635$   
 Traglastfaktor = 24.0000000

```

Anzahl Kontrollpunkte: 6
Anzahl Kanten: 9
    davon Fließlinien: 5
Anzahl Plattensegmente: 4
    davon          eben: 4
                Fächer: 0

```

Im Programm *FLX* sind alle in der Topologie gespeicherten Verbindungen zwischen zwei Punkten als Kanten bezeichnet. Die Kanten am gelenkigen Rand (Kanten 12 bis 14 in Abbildung 20.3) sind keine Fließlinien.

Aufgrund von numerischen Ungenauigkeiten treffen sich die vier radialen Fließlinien nicht genau in einem Punkt. Daher treten in der Plattenmitte zwei Kontrollpunkte auf, die mit einer sehr kurzen Fließlinie verbunden sind. Aus diesem Grund sind in der Ausgabe mehr Fließlinien und Kontrollpunkte aufgeführt, als zu erwarten wären.

Beim Übergang zu Phase 3 wird diese kurze Fließlinie eliminiert und die Kontrollpunkte zusammengefasst. Die Eckdaten am Ende der Phase 3 sind:

```

Platte erfolgreich berechnet.
Anzahl freier Parameter für Optimierung: 0
innere Arbeit  $A_i$  = 5.6127233
äußere Arbeit  $A_a$  = 0.2338635
Traglastfaktor = 24.0000000

```

```

Anzahl Kontrollpunkte: 5
Anzahl Kanten: 8
    davon Fließlinien: 4
Anzahl Plattensegmente: 4
    davon          eben: 4
                Fächer: 0

```

Da in diesem Fließlinienmuster keine Fächer auftreten, ist in Phase 3 keine weitere Optimierung notwendig und die Anzahl der Optimierungsparameter ist Null. Phase 2 entfällt in diesem Beispiel ebenfalls, da nur ein Plattenbereich definiert ist. Es sind also keine Kombinationen von Plattenbereichen zu untersuchen.



### 20.1.3 Variante 2 - eingespannte Lagerung

#### Analytische Lösung

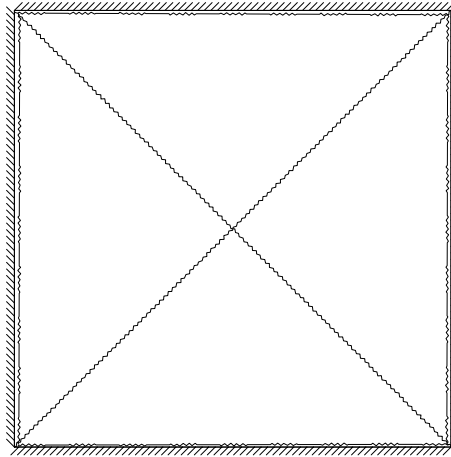


Abbildung 20.4: Fließlinienmuster analytische Lösung 1

Wählt man ein Fließlinienmuster in Analogie zu Variante 1 (siehe Abbildung 20.4), jedoch mit zusätzlichen negativen Fließlinien an den eingespannten Plattenrändern, so erhält man als Traglastfaktor

$$\lambda_{T1} = 48 \frac{m_u}{p a^2} \quad (20.5)$$

In den Plattenecken treten negative Drillmomente auf. Wie bereits in Abschnitt 4.5 dargestellt, entstehen aufgrund dieser Drillmomente in den Ecken zusätzliche Plattensegmente. Abbildung 20.5 zeigt ein entsprechendes Fließlinienmuster mit ebenen Segmenten in den Plattenecken.

Der Traglastfaktor hierfür kann analytisch berechnet werden. An dieser Stelle soll jedoch nur der Berechnungsgang kurz skizziert werden. Auf die Angabe der zum Teil sehr langen Gleichungen wird verzichtet.

Unter Ausnutzung der Symmetrie kann man davon ausgehen, dass die Verdrehung der vier Plattensegmente an den Plattenrändern gleich ist. Diese Verdrehung wird mit 1 festgelegt. Wegen der Symmetrie gilt ebenfalls, dass das Fließlinienmuster in den vier Plattenecken identisch ist. Ebenso muss die Fließlinie der Drillmomente unter einem Winkel von  $45^\circ$  zu den Plattenrändern verlaufen. Es bleiben also nur zwei Parameter für die Optimierung übrig: Der Abstand der Drillmoment-Fließlinie zu Plattenecke und der Neigungswinkel der ebenen Plattensegmente in den Plattenecken.

Mit diesen Parametern läßt sich das maßgebende Fließlinienmuster und der Traglastfaktor der Platte bestimmen:

$$\lambda_{T2} = 44.008 \frac{m_u}{p a^2} \quad (20.6)$$

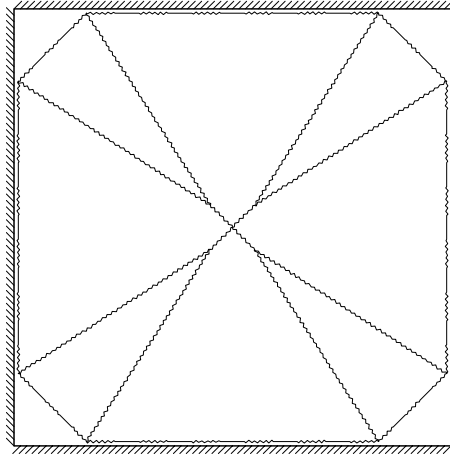


Abbildung 20.5: Fließlinienmuster analytische Lösung 2

Eine verbesserte Lösung berechnet E. Fox in [19] (Abbildung 20.6). Er verwendet Eckfächer, die Fließlinien sowohl in radialer als auch in tangentialer Richtung aufweisen.

Der Traglastfaktor nach Fox beträgt

$$\lambda_{T3} = 42.851 \frac{m_u}{a^2} \quad (20.7)$$

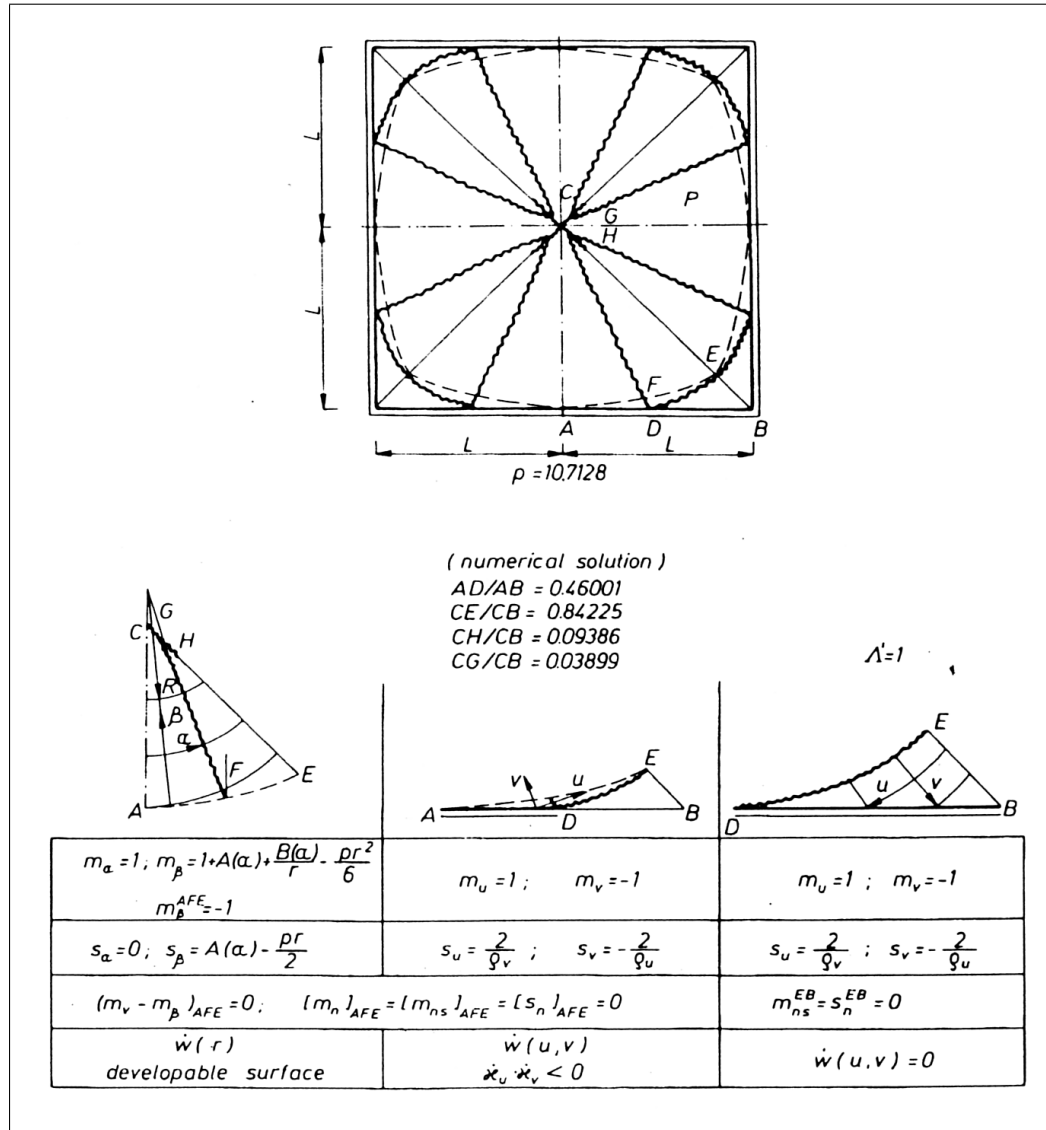


Abbildung 20.6: analytische Lösung nach Fox, Darstellung entnommen aus [48]

## Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Die Berechnung im Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) wird wieder für  $p = 1$  und  $a = 1$  sowie  $m_u = 1$  durchgeführt:

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  errechnet einen Traglastfaktor (siehe Abbildungen 20.7 und 20.8) von

$$\lambda_T = 42.880 \quad (20.8)$$

Das Ergebnis der Berechnung des Programms  $\mathcal{FLX}$  weicht damit nur um 0.1% von der Lösung von Fox ab.

Abbildung 20.7 zeigt das vom Programm  $\mathcal{FLX}$  bestimmte Fließlinienmuster. In Abbildung 20.8 ist die virtuelle Verschiebungsfigur dargestellt.

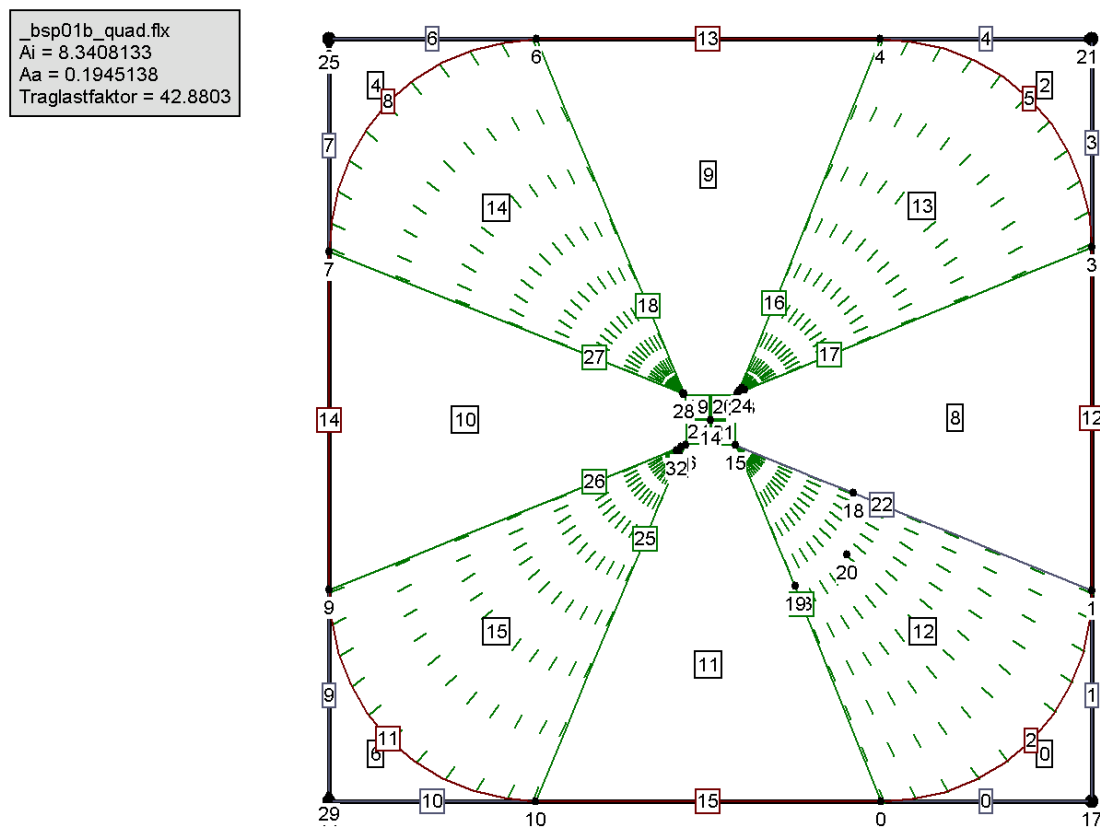


Abbildung 20.7: Fließlinienmuster zu Variante 2, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

\_bsp01b\_quad.flx  
Ai = 8.3408133  
Aa = 0.1945138  
Traglastfaktor = 42.8803

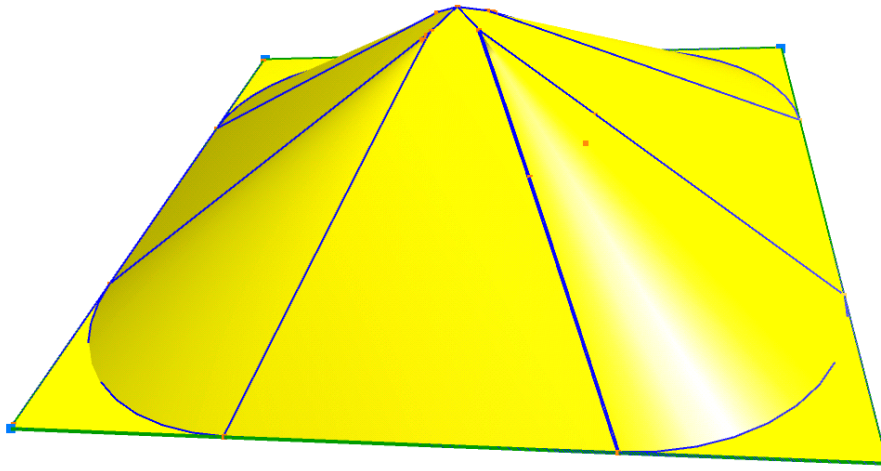


Abbildung 20.8: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

Am Ende von Phase 1 (siehe Abbildung 20.9) findet das Programm  $\mathcal{FLX}$  die analytische Lösung aus Abbildung 20.5. Durch die Verwendung der Fächer statt der ebenen Plattensegmente in den Ecken wird der errechnete Traglastfaktor also um 2.5% reduziert.

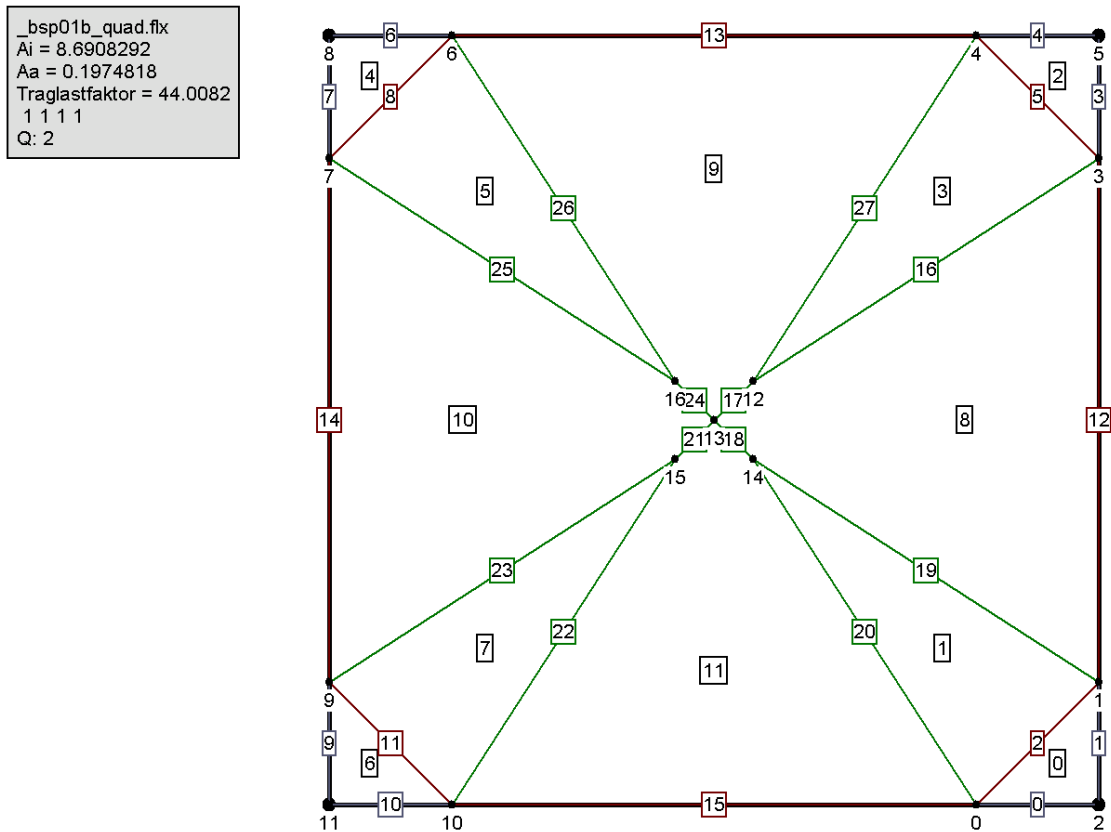


Abbildung 20.9: Fließlinienmuster am Ende von Phase 1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Eckdaten der Berechnung des Programms  $\mathcal{FLX}$  am Ende der Phase 1 sind:

Platte erfolgreich berechnet.

Anzahl freier Parameter für Optimierung: 16

innere Arbeit  $A_i = 8.6908292$

äußere Arbeit  $A_a = 0.1974818$

Traglastfaktor = 44.0082467

Anzahl Kontrollpunkte: 17

Anzahl Kanten: 28

davon Fließlinien: 28

Anzahl Plattensegmente: 12

davon eben: 12

Fächer: 0

Das Programm listet zwölf ebene Plattensegmente. Neben den acht offensichtlichen Plattensegmenten wurde in jeder Plattenecke ein zusätzliches Dummy-Segment (Nr. 0,

2, 4 und 6) eingefügt. Durch diese Dummy-Segmente wird die geometrische Zulässigkeit des Fließlinienmusters in den Plattenecken gewährleistet (siehe Abschnitt 16.2).

Die Berechnung in Phase 1 erfolgt mit 16 Optimierungsparametern. Dies sind die Neigungswinkel der acht ebenen Plattensegmente, sowie die Streckenkoordinaten der acht Punkte auf den Plattenrändern.

In Phase 3 werden vier der ebenen Plattensegmente durch Fächersegmente ersetzt:

Platte erfolgreich berechnet.

Anzahl freier Parameter für Optimierung: 64

innere Arbeit  $A_i = 8.3408133$

äußere Arbeit  $A_a = 0.1945138$

Traglastfaktor = 42.8803099

Anzahl Kontrollpunkte: 33

Anzahl Kanten: 28

    davon Fließlinien: 28

Anzahl Plattensegmente: 12

    davon           eben: 8

                  Fächer: 4

Für die Optimierung der Fächer werden 64 Parameter genutzt. Diese beschreiben die Koordinaten und Gewichtsfaktoren der Kontrollpunkte der Fächer.

### 20.1.4 Variante 3 - gelenkige Lagerung mit $m_u^- = 0$

#### Analytische Lösung

Für Fließlinienmuster, die am Rand nur negative und im Inneren nur positive Fließlinien aufweisen (oder umgekehrt), gilt: Die innere Arbeit der negativen Fließlinien am Fächerrand ist gleich der inneren Arbeit der positiven Fließlinien. Den Beweis hierfür liefert Jennings in [29]. In Variante 1 des Beispiels 1 tritt genau dieser Fall auf, dass am Rand nur negative und im Inneren nur positive Fließlinien vorhanden sind.

Indem  $m_u^- = 0$  gesetzt wird, wird sich die innere Arbeit und somit auch der errechnete Traglastfaktor halbieren. Die Variante 3 dieses Beispiels dient dazu, diese Eigenschaft im Programm  $\mathcal{FLX}$  zu verifizieren.

Für ein Fließlinienmuster in Analogie zu Variante 1 (siehe Abbildung 20.4) ist als Traglastfaktor zu erwarten:

$$\lambda_{T1} = 24 \frac{m_u}{p a^2} \quad (20.9)$$

Da das negative plastische Moment gleich Null ist, macht es in diesem Beispiel keinen Unterschied, ob die Platte an den Rändern eingespannt oder gelenkig gelagert ist. Trotz der gelenkigen Lagerung wird sich daher ein Fließlinienmuster analog zu Variante 2 ergeben.

Die Platte kann jedoch dem Eckdrillmoment keinen Widerstand leisten. Der für das Fließlinienmuster aus Abbildung 20.5 zu erwartende Traglastfaktor ist:

$$\lambda_{T2} = 22.004 \frac{m_u}{p a^2} \quad (20.10)$$

Und für die Lösung mit Eckfächern:

$$\lambda_{T3} = 21.426 \frac{m_u}{a^2} \quad (20.11)$$

#### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet für  $p = 1$  und  $a = 1$  sowie  $m_u^+ = 1$  und  $m_u^- = 0$  (siehe Abbildung 20.10) einen Traglastfaktor von

$$\lambda_T = 21.441 \quad (20.12)$$

Wie erwartet zeigt auch die Berechnung mit dem Programm  $\mathcal{FLX}$ , dass sich die Traglast der Platte halbiert, wenn das negative plastische Moment zu Null wird. Für das Fließlinienmuster aus Variante gilt also, dass die innere Arbeit aller negativen Fließlinien gleich der inneren Arbeit der positiven Fließlinien ist.



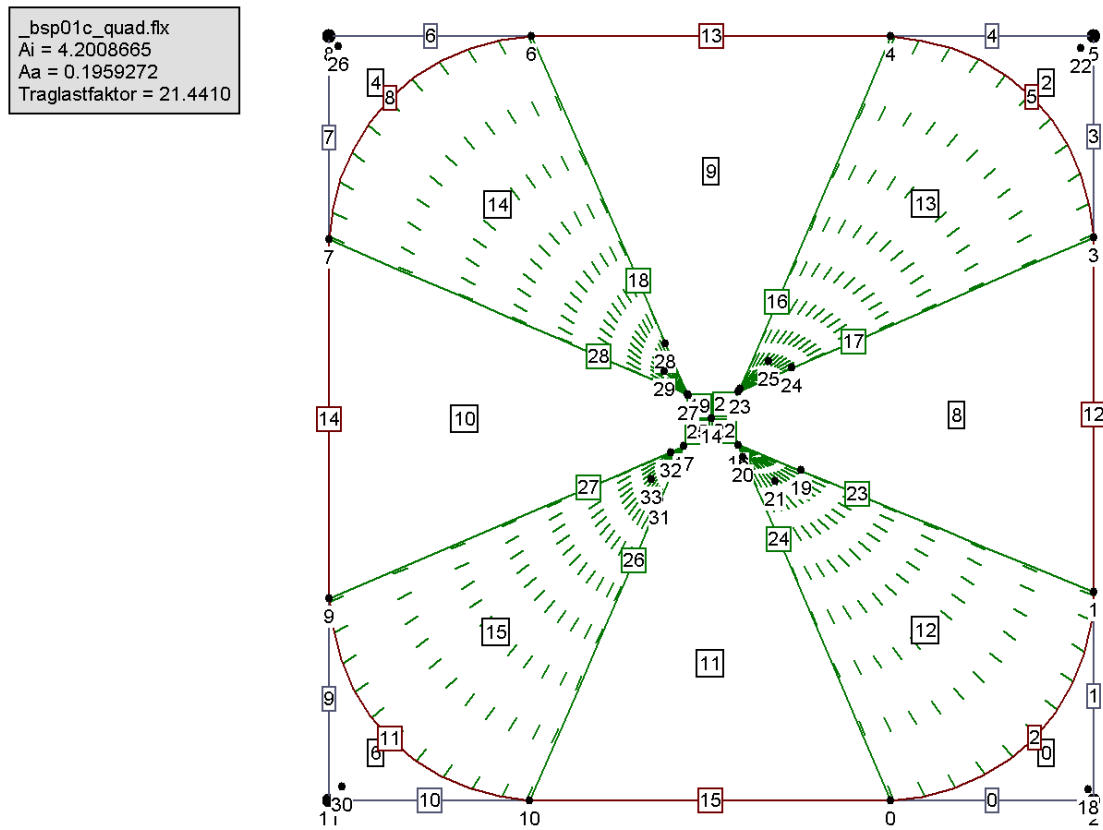


Abbildung 20.10: Fließlinienmuster zu Variante 3, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

## 20.2 Beispiel 2: Orthotrope Stahlbetonrechteckplatte

### 20.2.1 Aufgabenstellung

An dieser Stelle wird das Einführungsbeispiel aus Kapitel 4 wieder aufgegriffen. Eine eingespannt gelagerte, rechteckige Stahlbetonplatte wird durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastet.

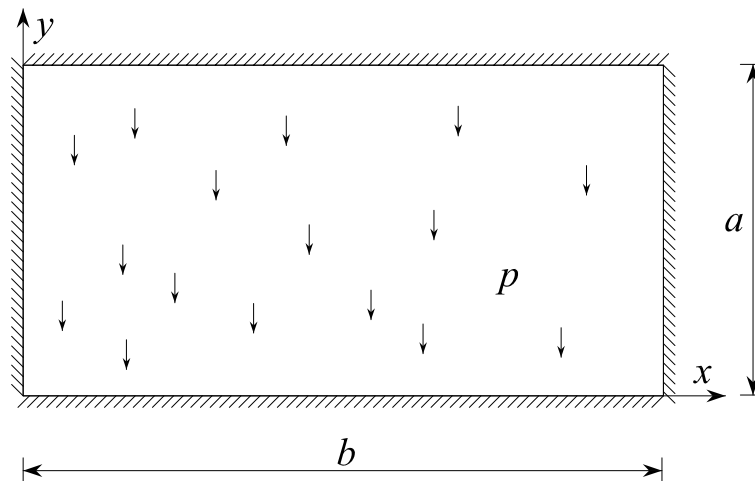


Abbildung 20.11: System und Belastung

- Seitenlängen:  $a = 4.8m$ ,  $b = 9.6m$
- Plattendicke  $h = 15cm$ ,  $d = 12cm$
- Querdehnzahl  $\nu = 0.3$
- Hebelarm der inneren Kräfte  $z = 0.9d = 10.8cm$
- Entwurfslast (Eigengewicht + Nutzlast)  $p = 10kN/m^2$

Die Bemessung erfolgt mittels einer elastischen Plattenberechnung nach Czerny.

$$\begin{aligned}
 \max m_x &= \frac{pb^2}{420} = 2.19kNm/m \\
 \min m_x &= -\frac{pb^2}{70} = -13.17kNm/m \\
 \max m_y &= \frac{pb^2}{100} = 9.22kNm/m \\
 \min m_y &= -\frac{pb^2}{48} = -19.20kNm/m
 \end{aligned} \tag{20.13}$$

Es wird angenommen, dass für diese errechneten Biegemomente eine gerade ausreichende Bewehrung über die gesamte Platte konstant eingelegt wird. Damit ist:

$$\begin{aligned} m_{u,x}^+ &= 2.19 \text{ kNm/m} \\ m_{u,x}^- &= -13.17 \text{ kNm/m} \\ m_{u,y}^+ &= 9.22 \text{ kNm/m} \\ m_{u,y}^- &= -19.20 \text{ kNm/m} \end{aligned} \tag{20.14}$$

## 20.2.2 Ermittlung der Traglast

### Analytische Lösung

Die analytische Ermittlung der Traglast nach der Fließlinientheorie wurde in Abschnitt 4 durchgeführt. Es wurde dabei ein sehr einfaches Fließlinienmuster angenommen (Abbildung 4.2).

Der für dieses Fließlinienmuster ermittelte Traglastfaktor beträgt:

$$\lambda_T = 1.504 \tag{20.15}$$

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet einen Traglastfaktor von

$$\lambda_T = 1.381 \tag{20.16}$$

Aus der plastischen Traglastberechnung folgt somit, dass die Platte noch eine 38%ige Tragreserve gegenüber der elastischen Bemessung besitzt. Das maßgebende Fließlinienmuster mit den Fließlinienfächern in den Plattenecken ist in Abbildung 20.12 dargestellt. Abbildung 20.13 zeigt die dazu gehörende virtuelle Verschiebungsfigur.

Das Programm ermittelt für die Optimierung in Phase 3 folgende Werte:

```

Platte erfolgreich berechnet.
Anzahl freier Parameter für Optimierung: 82
innere Arbeit Ai = 678.8780493
äußere Arbeit Aa = 491.3902294
Traglastfaktor = 1.3814457

```

```

Anzahl Kontrollpunkte: 34
Anzahl Kanten: 27
    davon Fließlinien: 27
Anzahl Plattensegmente: 12
    davon          eben: 8
                  Fächer: 4

```

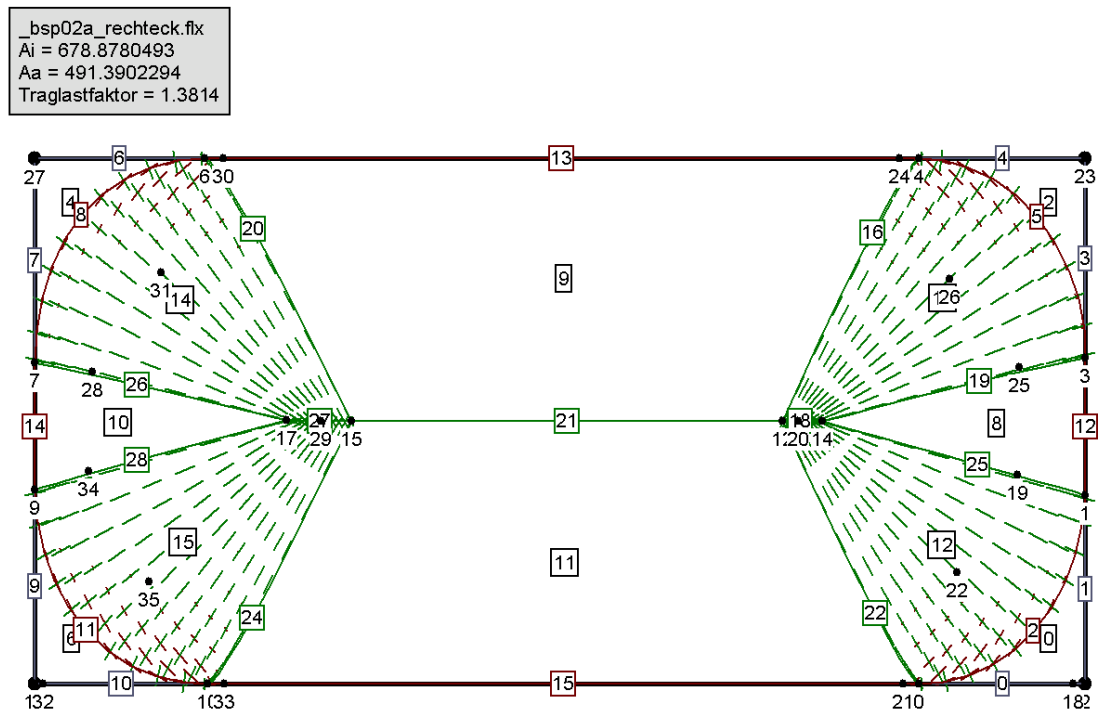


Abbildung 20.12: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

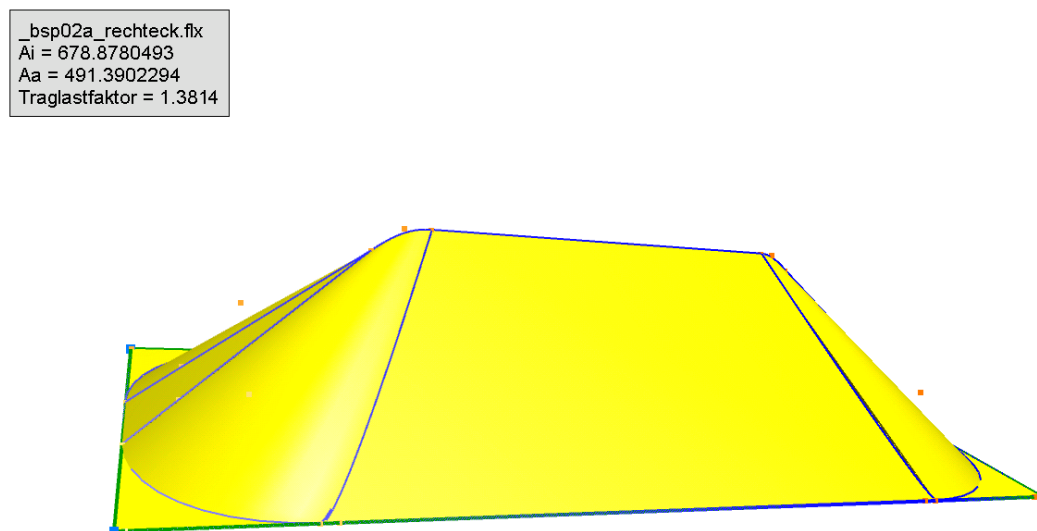


Abbildung 20.13: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

In diesem Beispiel sind in den 82 Optimierungsparametern neben den Koordinaten und den Gewichtungsfaktoren der Kontrollpunkte auch die Transformationsparameter

enthalten. Da die Platte nicht isotrop ist, sollte bei der Optimierung die Transformation (siehe Kapitel 7) berücksichtigt werden. Dadurch ergeben sich je Fächersegment die zwei zusätzlichen Optimierungsparameter  $a_{yx}$  und  $a_{yy}$ . Wie in Abbildung 20.12 zu sehen ist, treten in den Ecken der Fächer Fließlinien in zwei Richtungen auf, die nicht senkrecht zueinander sind. Die Transformationsparameter werden in diesem Beispiel bestimmt zu:

- Fächersegment 12:  $a_{yx} = 0.015$  und  $a_{yy} = 0.731$
- Fächersegment 13:  $a_{yx} = -0.010$  und  $a_{yy} = 0.732$
- Fächersegment 14:  $a_{yx} = 0.003$  und  $a_{yy} = 0.737$
- Fächersegment 15:  $a_{yx} = 0.013$  und  $a_{yy} = 0.736$

Nach Gleichung 7.30 wären  $a_{yx} = 0$  und  $a_{yy} = 0.635$  zu erwarten gewesen. Die Optimierung der Transformationsparameter im Rahmen der Bestimmung der Traglast liefert wie erwartet etwas andere Werte.

Wenn die Transformation deaktiviert wird, so besitzt die Platte in Phase 3 nur 74 freie Optimierungsparameter. In Abbildung 20.14 ist das dazu gehörende Fließlinienmuster dargestellt. In den Ecken der Fächersegmente treten keine sich kreuzenden Fließlinien auf. Der errechnete Traglastfaktor ist mit  $\lambda_T = 1.382$  geringfügig größer als bei der Berechnung mit aktivierter Transformation.

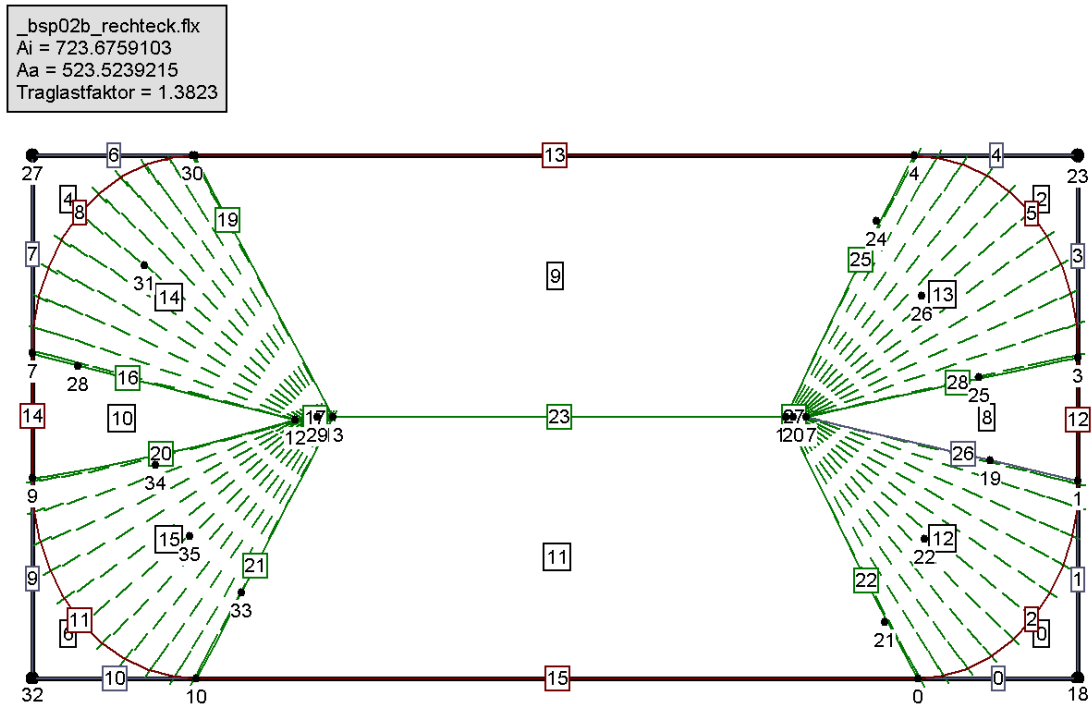


Abbildung 20.14: Fließlinienmuster ohne Berücksichtigung der Transformation, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Am Ende von Phase 1 wird das in Abschnitt 4.5 beschriebene Fließlinienmuster gefunden. Abbildung 20.15 zeigt die Darstellung im Programm  $\mathcal{FLX}$ .

Auch das Fließlinienmuster aus Abschnitt 4.2 wird als Zwischenergebnis gefunden (Abbildung 20.16). Dieses Fließlinienmuster wird in  $\mathcal{FLX}$  jedoch zugunsten des Fließlinienmusters aus Abbildung 20.15 verworfen.

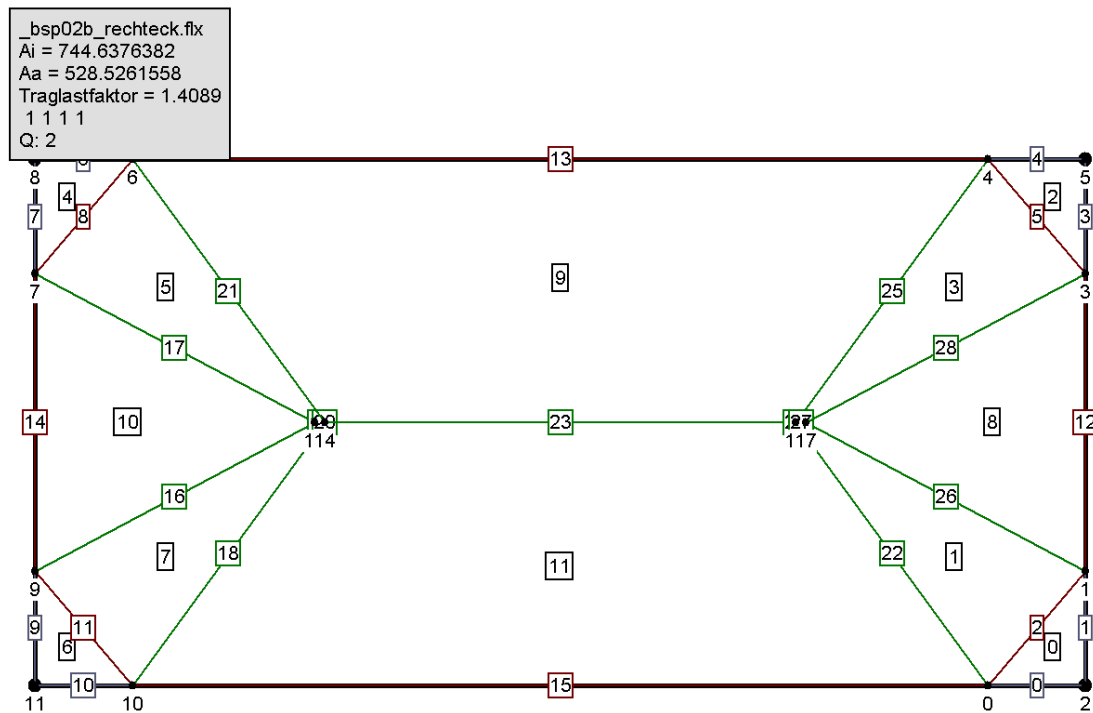


Abbildung 20.15: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$  am Ende von Phase 1

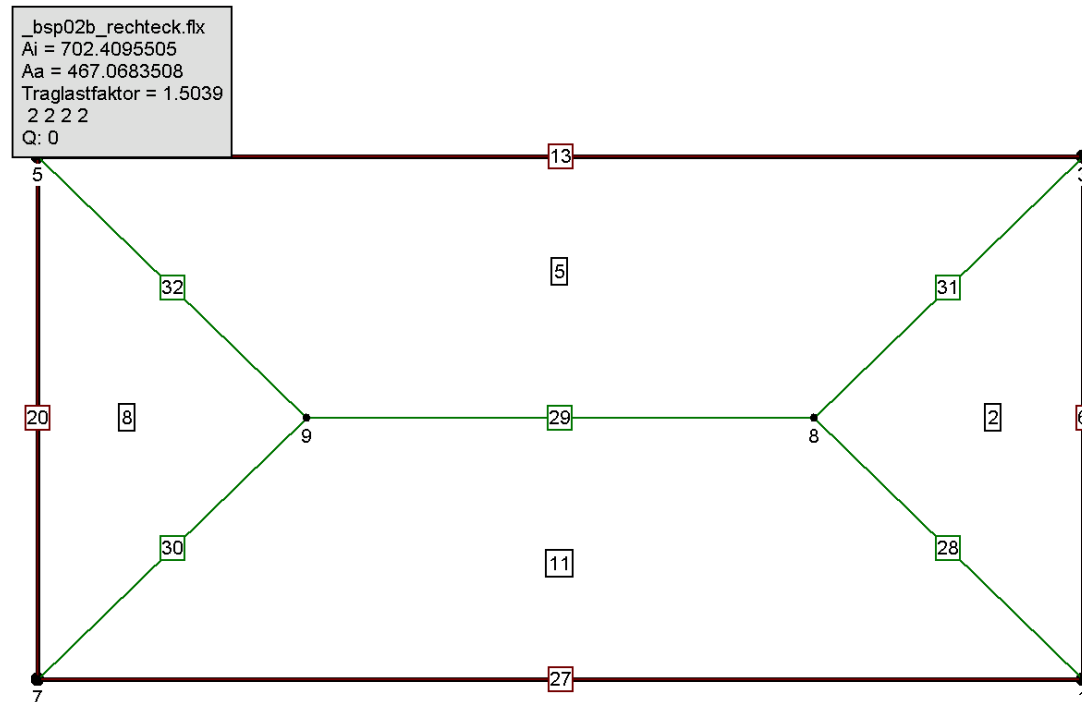


Abbildung 20.16: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$ , Zwischenergebnis

## 20.3 Beispiel 3: Isotrope Dreiecksplatte

### 20.3.1 Aufgabenstellung

Untersucht wird eine Platte in Form eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks. Die beiden kürzeren Ränder sind eingespannt, der längere Rand ist frei. Die Länge des freien Randes ist  $2a$ , die eingespannten Ränder sind  $\sqrt{2}a$  lang. Die Platte wird durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastet. Das plastische Moment  $m_u^+ = -m_u^- = m_u$  ist in allen Richtungen gleich.

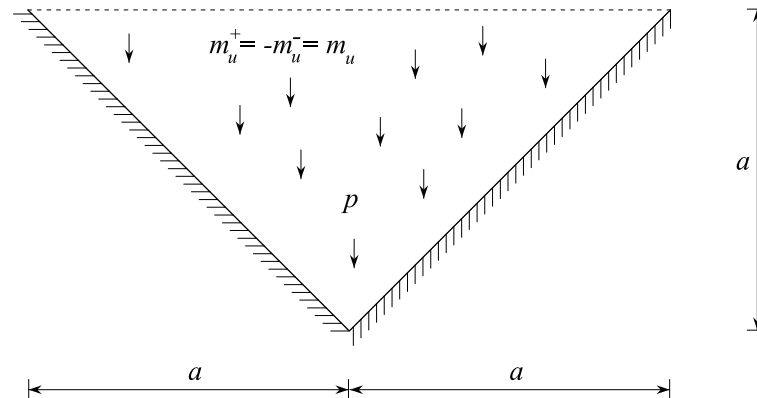


Abbildung 20.17: System und Belastung

**Variante 1** Die Platte wird wie oben dargestellt untersucht.

**Variante 2** Der freie Rand wird durch einen Unterzug verstärkt. Positives und negatives plastisches Moment des Unterzuges sind  $M_u = m_u a$ .

**Variante 3** Die Plattengeometrie der Variante 1 wird abgeändert: die Ecke oben rechts wird um die Länge  $a$  nach rechts verschoben. Die Längen der Ränder betragen jetzt  $3a$  (freier Rand),  $\sqrt{2}a$  und  $\sqrt{5}a$  (Abbildung 20.18).

### 20.3.2 Variante 1 - eingespannte Lagerung

#### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Im Programm  $\mathcal{FLX}$  wird der Traglastfaktor für  $p = 1$  und  $a = 1$  sowie  $m_u = 1$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet (siehe Abbildung 20.19):

$$\lambda_T = 16.491 \quad (20.17)$$



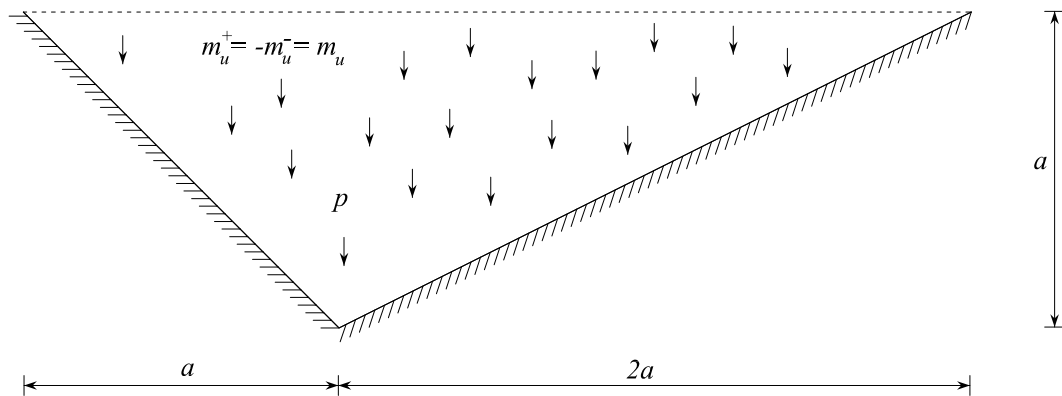


Abbildung 20.18: System und Belastung Variante 3

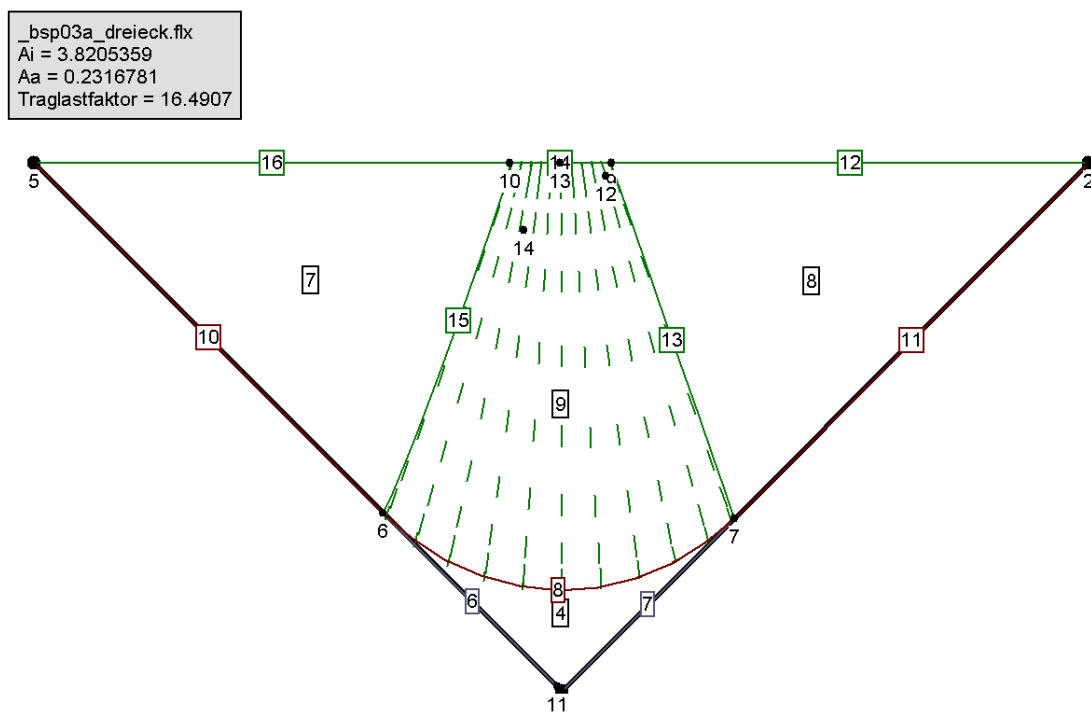


Abbildung 20.19: Fließlinienmuster zu Variante 1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

\_bsp03a\_dreieck.flx  
 $A_i = 3.8205359$   
 $A_a = 0.2316781$   
 Traglastfaktor = 16.4907

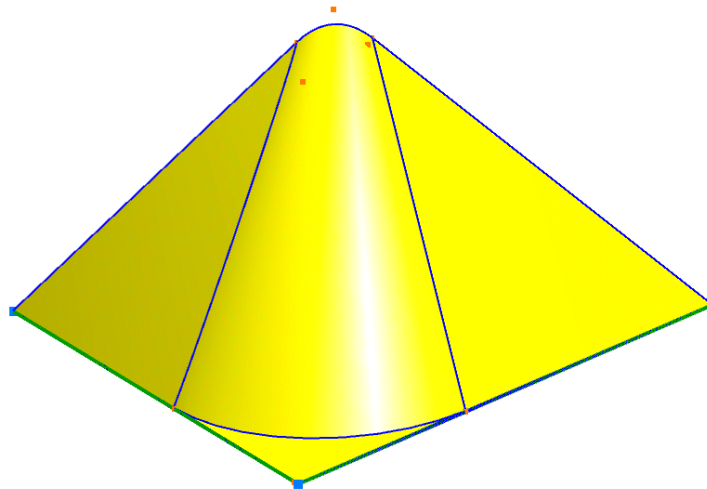


Abbildung 20.20: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

\_bsp03a\_dreieck.flx  
 $A_i = 3.9621373$   
 $A_a = 0.2354105$   
 Traglastfaktor = 16.8308

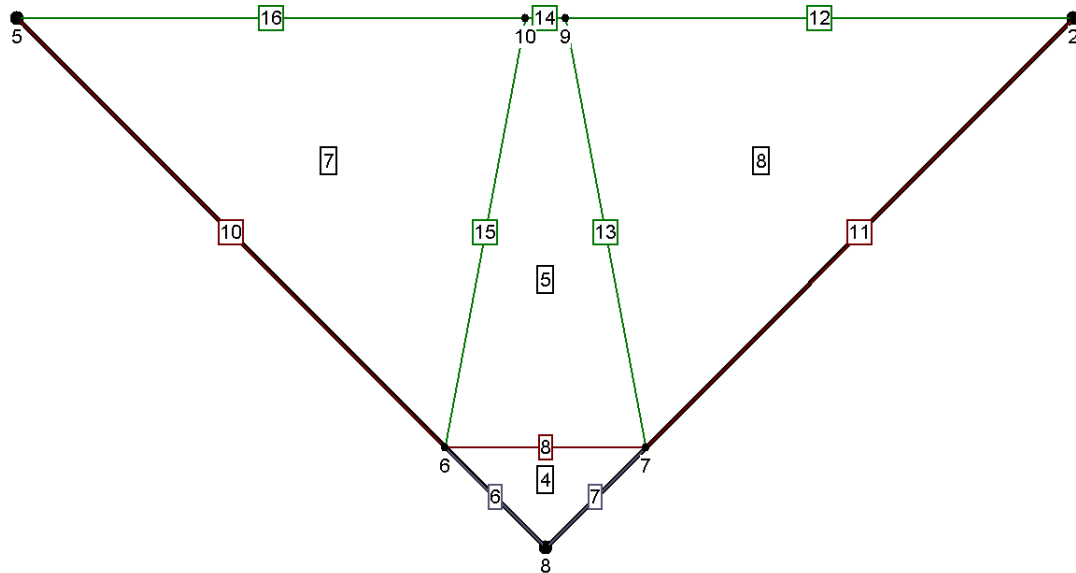


Abbildung 20.21: Fließlinienmuster am Ende von Phase 1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Am Ende von Phase 1 beträgt der errechnete Traglastfaktor ohne die Verwendung der Fächer  $\lambda_T = 16.831$  (Abbildung 20.21).

### 20.3.3 Variante 2 - eingespannte Lagerung mit Unterzug am freien Rand

#### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Im Programm  $\mathcal{FLX}$  erfolgt die Berechnung wieder für  $p = 1$  und  $a = 1$  sowie  $m_u = 1$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3). Das plastische Moment des Unterzugs ist dabei  $M_u = m_u a = 1$ . Der errechnete Traglastfaktor (siehe Abbildung 20.22) beträgt:

$$\lambda_T = 22.758 \quad (20.18)$$

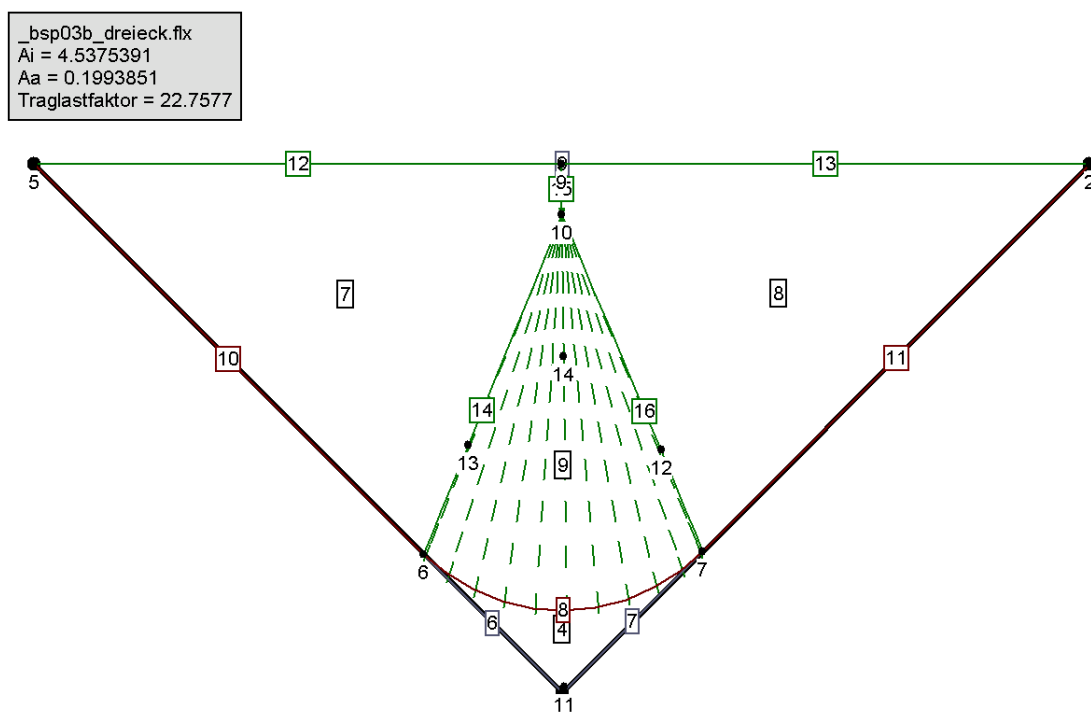
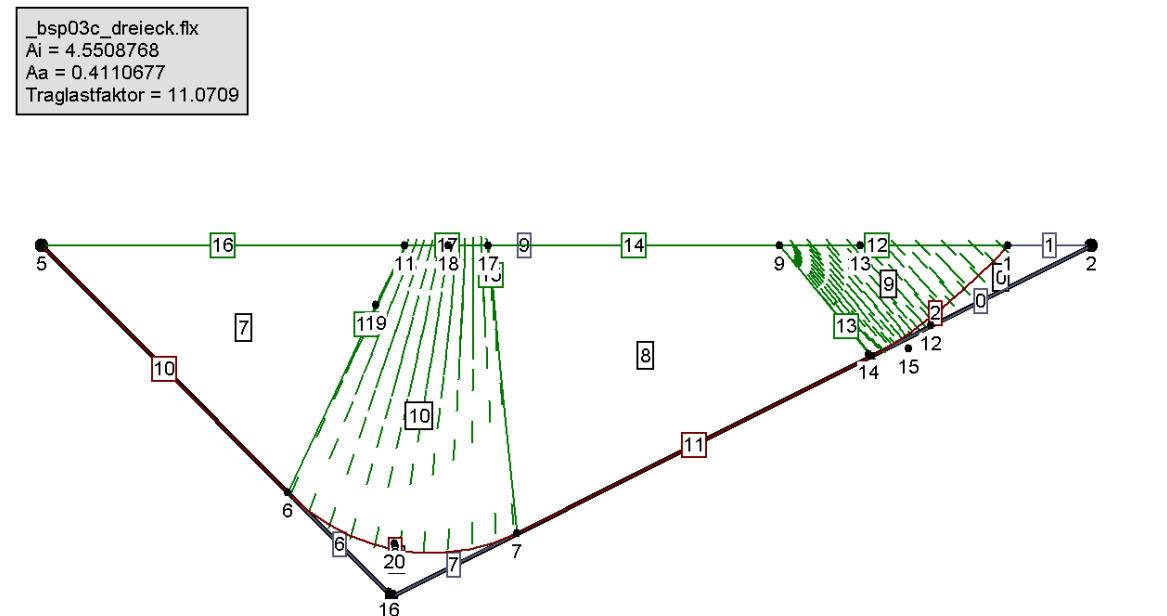


Abbildung 20.22: Fließlinienmuster zu Variante 2, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

### 20.3.4 Variante 3 - eingespannte Lagerung mit veränderter Geometrie

#### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Dieses Beispiel soll vor allem dazu dienen, die Qualitäten des Algorithmus zu demonstrieren. In der spitzen Plattenecke verläuft die Fließlinie nicht bis zur Plattenecke, sondern es bildet sich ein weiterer Fächer aus, so dass sich die Länge der Randfließlinie verkürzt.



## 20.4 Beispiel 4: Einachsig gespannte Platte mit Einzellast

### 20.4.1 Aufgabenstellung

Eine zweiseitig gelenkig gelagerte Platte sei in der  $x$ -Richtung unendlich lang. Auf diese Platte wirkt eine aussermittige Einzellast. Die Platte besteht aus einem Stahlblech, d.h.  $m_u^+ = -m_u^- = m_u$  ist in allen Richtungen gleich.

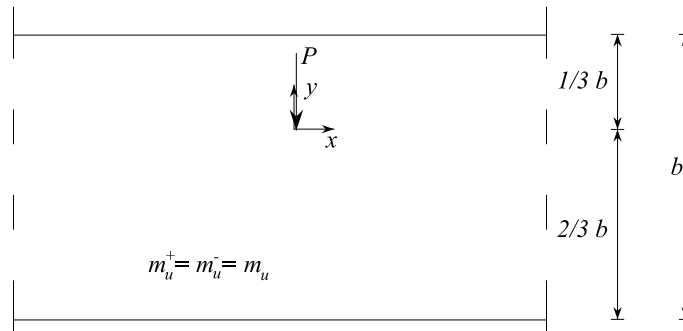


Abbildung 20.24: System und Belastung

### 20.4.2 Berechnung der Traglast

#### Analytische Lösung

In mehreren Schritten soll gezeigt werden, wie der in der analytischen Lösung verwendete Fächer mit einer Umrandung aus einer logarithmischen Spirale entsteht.

Zuerst wird ein einfaches Fließlinienmuster mit geraden Fließlinien gewählt. Die virtuelle Verschiebungsfigur des Fließlinienmusters besitzt die Form einer Pyramide.

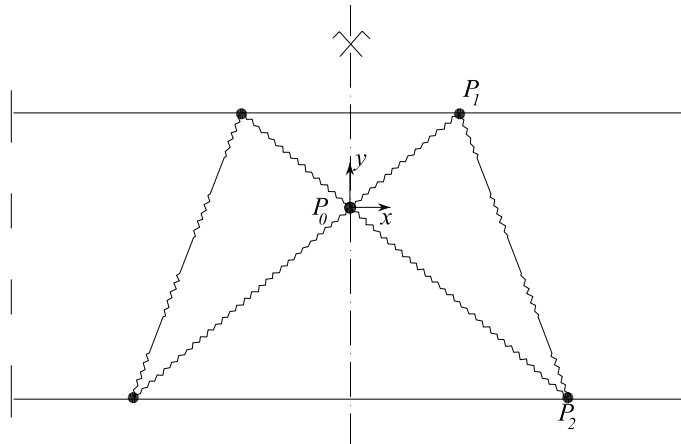


Abbildung 20.25: einfaches Fließlinienmuster mit geraden Fließlinien

Da der Absolutbetrag der virtuellen Verschiebung keinen Einfluss auf die Traglast hat, bleiben nur zwei freie Parameter für die Berechnung der Traglast übrig. Das sind die  $x$ -Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Das Minimum der Traglast ergibt sich für  $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}b$  und beträgt unabhängig von  $b$

$$\lambda_{T1} = 12 \frac{m_u}{P} \quad (20.20)$$

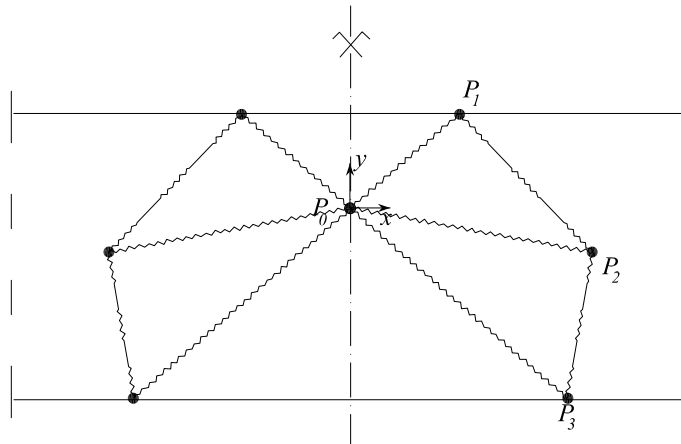


Abbildung 20.26: Fließlinienmuster mit zusätzlichem Segment

In Abbildung 20.26 wird ein weiteres Plattensegment eingefügt. Dieses Fließlinienmuster besitzt jetzt vier Parameter, die die Traglast beeinflussen. Dies sind die Koordinaten  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$  sowie  $x_3$  der Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ . Die  $y$ -Koordinate der Punkte  $P_1$  und  $P_3$  ist wieder durch die Plattenränder vorgegeben. Aus der Lösung der Extremwertaufgabe zum Minimieren des Traglastfaktors erhält man die Lage der

Eckpunkte zu

$P1(0.537b, \frac{1}{3}b)$ ,  $P2(0.716b, -0.131b)$  und  $P3(0.510b, -\frac{2}{3}b)$ .

Die errechnete Traglast verringert sich damit auf

$$\lambda_T = 11.167 \frac{m_u}{P} \quad (20.21)$$

Wird dieser Vorgang des Einfügens zusätzlicher Plattensegmente unendlich oft wiederholt, so erhält man als Lösung einen Fächer in Form einer logarithmischen Spirale. Diese Lösung ist auch in der Literatur (z.B. [28]) angegeben.

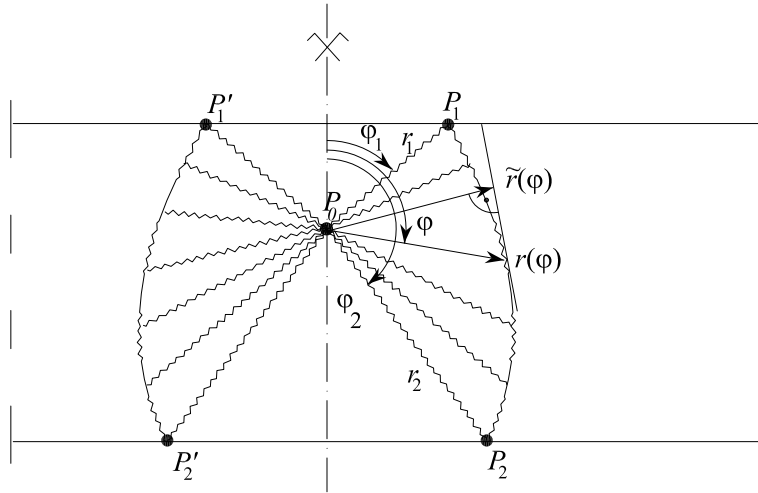


Abbildung 20.27: logarithmische Spirale

Die virtuelle Verschiebung des Punktes  $P_0$  unter der Einzellast wird mit  $\delta w_0 = 1$  festgelegt. Die äußere Arbeit für den in Abbildung 20.27 dargestellten Fächer errechnen sich damit zu:

$$\delta A_a = 1P \quad (20.22)$$

Zur Berechnung der inneren Arbeit benötigt man eine von Jennings in [29] hergeleitete Beziehung für Fließlinienmuster, die am Rand ausschließlich negative und im Inneren ausschließlich positive Fließlinien aufweisen. Unabhängig vom Verlauf der inneren Fließlinien gilt nach Jennings für diese Fließlinienmuster stets

$$-\delta A_i = \sum_{\text{Platten-segmente}} L_i \delta \theta_i (m_u^+ - m_u^-) \quad (20.23)$$

Dabei ist  $L_i$  die Länge der negativen Fließlinie (= Rotationsachse) und  $\theta_i$  der virtuelle Drehwinkel des Plattensegments. Bei der Anwendung dieser Gleichung auf Abbildung 20.27 ist zu beachten, dass bei den beiden großen Plattensegmenten  $P_0 - P_1 - P'_1$  und  $P_0 - P_2 - P'_2$  das negative plastische Moment  $m_u^- = 0$  ist, da die Rotationsachse mit dem gelenkigen Rand zusammen fällt. Für die Fächer geht die Länge  $L_i$  in  $dl$  über und die Summe geht in ein Integral über. Der virtuelle Drehwinkel  $\delta\theta(\varphi)$  errechnet sich zu  $1/\tilde{r}(\varphi)$ .  $\tilde{r}(\varphi)$  ist dabei der Abstand des Koordinatenursprungs (Lasteinleitungsstelle) zur Tangente an den Fächer.

Gleichung 20.23 angewandt auf 20.27 lautet also:

$$-\delta A_i = 2m_u \left[ \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{1}{3}b\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}b} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}b} + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\tilde{r}(\varphi)} dl \right] \quad (20.24)$$

In dieser Gleichung ist  $dl$  die Länge des zu  $d\varphi$  gehörenden Bogenabschnitts:

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi \quad \text{mit} \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \quad (20.25)$$

Die Länge  $\tilde{r}(\varphi)$  ergibt sich zu

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{r^2}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}} \quad (20.26)$$

Die innere Arbeit lautet somit

$$-\delta A_i = 2m_u \left[ \sqrt{\left(\frac{r_1}{\frac{1}{3}b}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{r_2}{\frac{2}{3}b}\right)^2 - 1} + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}}{r^2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi \right] \quad (20.27)$$

oder

$$-\delta A_i = 2m_u \left[ \sqrt{\left(\frac{r_1}{\frac{1}{3}b}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{r_2}{\frac{2}{3}b}\right)^2 - 1} + 2(\varphi_2 - \varphi_1) + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\dot{r}^2}{r^2} d\varphi \right] \quad (20.28)$$

Aufgrund der Quadrate ist stets  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\dot{r}^2}{r^2} d\varphi \geq 0$ . Das Minimum 0 ergibt sich für  $\dot{r} = 0$ , d.h. dem Kreisfächer. Dann erhält man die bekannte Formel für Kreisfächersegmente  $-\delta A_i = 2m_u(\varphi_2 - \varphi_1)$ .

Bei vorgegebenem  $r(\varphi_1) = r_1$  und  $r(\varphi_2) = r_2$  stellt sich die Frage, für welche Funktion  $r(\varphi)$  die innere Arbeit minimal wird. Da die ersten Terme in der Gleichung für  $-\delta A_i$  konstant sind, wenn  $r_1$  und  $r_2$  gegeben sind, ist diejenige Funktion  $r(\varphi)$  zu bestimmen, für die  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\dot{r}^2}{r^2} d\varphi$  minimal wird.

Die Berechnung der Eulerschen Bedingung der Variationsrechnung, angewandt auf das Integral  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\dot{r}^2}{r^2} d\varphi$  aus Gleichung 20.28, führt zu

$$\dot{r}^2 - r\ddot{r} = 0 \quad (20.29)$$



und diese Differentialgleichung ergibt die Lösung

$$r = e^{C_1\varphi + C_2} \quad (20.30)$$

Die Parameter  $C_1$  und  $C_2$  ergeben sich aus den beiden Randbedingungen.

$$C_1 = \frac{\ln(r_2) - \ln(r_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (20.31)$$

$$C_2 = \frac{\varphi_2 \ln(r_1) - \varphi_1 \ln(r_2)}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (20.32)$$

damit ist

$$\frac{\dot{r}}{r} = \text{konstant} = C_1 = \frac{\ln(r_2) - \ln(r_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (20.33)$$

und somit erhält man für die innere Arbeit:

$$-\delta A_i = 2m_u \left[ \sqrt{\left(\frac{r_1}{\frac{1}{3}b}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{r_2}{\frac{2}{3}b}\right)^2 - 1} + 2(\varphi_2 - \varphi_1) + 2\frac{\left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right)^2}{\varphi_2 - \varphi_1} \right] \quad (20.34)$$

Die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ergeben sich aus der Geometrie.

Die minimale Traglast erhält man für  $r_1 = 0.581b$  und  $r_2 = 0.794b$ . Die Traglast ist unabhängig von  $b$ :

$$\lambda_{T3} = 10.822 \frac{m_u}{P} \quad (20.35)$$

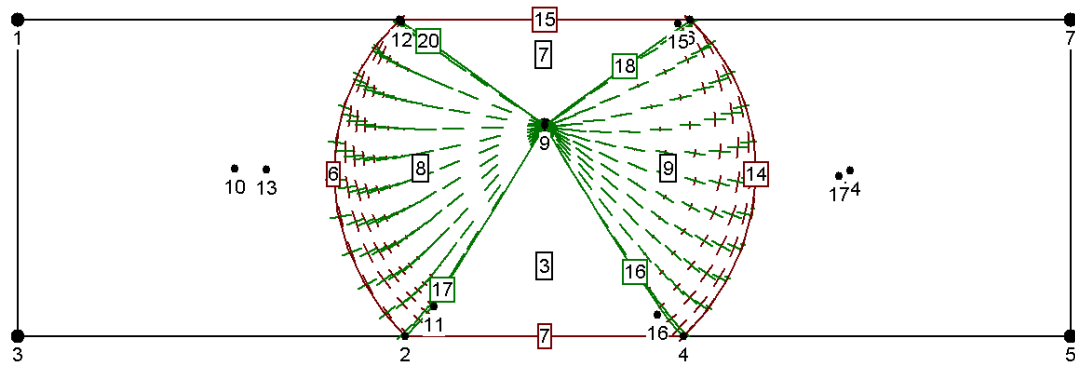
Dies ist die bislang bekannte Lösung für dieses Problem. Wie man jedoch in der Abbildung 20.27 sieht, ist das Orthogonalitätskriterium nicht erfüllt! Positive und negative Fließlinien sind nicht senkrecht zueinander.

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

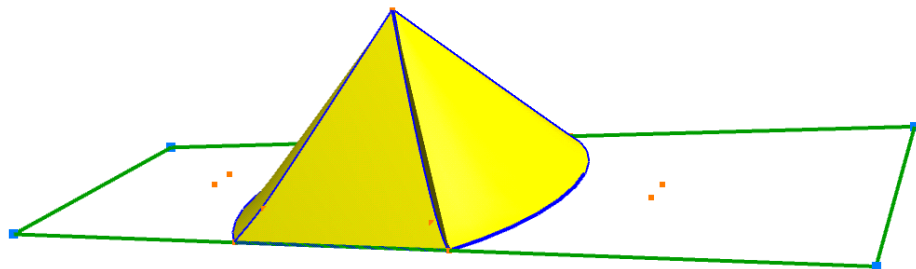
Im Programm  $\mathcal{FLX}$  wurde das Beispiel für  $P = 1$  und  $b = 3$  sowie  $m_u = 1$  gerechnet.

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet einen Traglastfaktor (Abbildung 20.28) von

$$\lambda_T = 10.739 \quad (20.36)$$



```
_bsp04a_einzellast.flx
Ai = 13.4344115
Aa = 1.2509756
Traglastfaktor = 10.7391
```



Durch die Verwendung der doppelt gekrümmten Fächer wird das Orthogonalitätskriterium erfüllt, und man erhält in der Tat eine um 0.8% geringere Traglast als für den Ansatz einer logarithmischen Spirale in Abbildung 20.27.

Dissertation - JÖRN WEICHERT

\_bsp04a\_einzellast.flx  
 $A_i = 11.3142437$   
 $A_a = 0.9429597$   
 Traglastfaktor = 11.9987

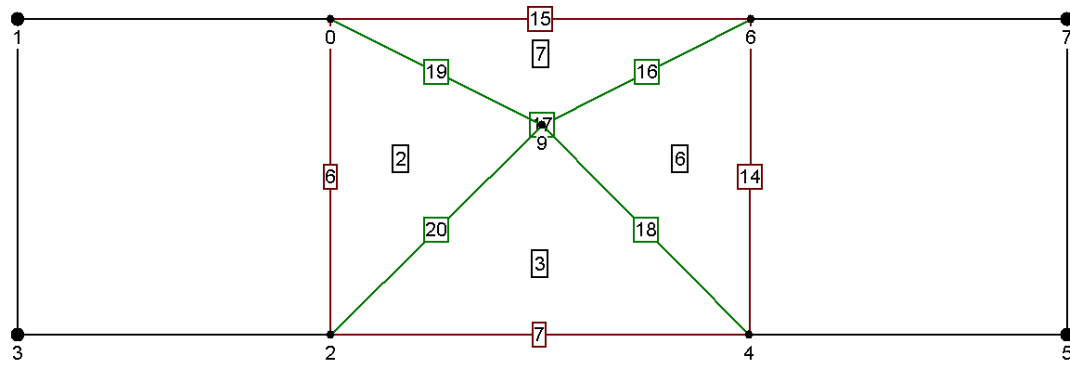


Abbildung 20.30: Fließlinienmuster am Ende von Phase1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Abbildung 20.31: Ergebnis Programm  $\mathcal{FLX}$

## 20.5 Beispiel 5: Stützenflansch eines steifenlosen Stirnplattenanschlusses

### 20.5.1 Aufgabenstellung

Bei der Bemessung von biegesteifen Rahmenecken ohne Steifen ist häufig der Biegenachweis des Stützenflansches bemessungsrelevant. Anhand eines Beispiels soll die zulässige Schraubenzugkraft als Ergebnis des Programms *FLX* mit den zulässigen Werten nach Eurocode EC3 verglichen werden.

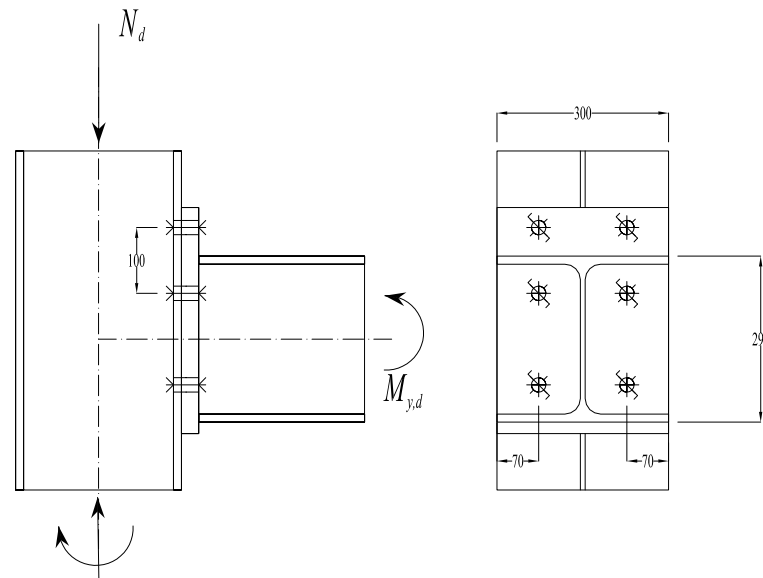


Abbildung 20.32: steifenloser Stirnplattenanschluss

- Querschnitt Stütze und Riegel: HEA300
- Flanschdicke:  $t = 14mm$
- Höhe:  $h = 290mm$
- Breite:  $b = 300mm$

Die Schrauben im Zugbereich haben einen vertikalen Abstand von 10.0cm und sind symmetrisch zum Riegel-Obergurt angeordnet.

Der horizontale Abstand vom Profilrand beträgt 7.0cm. Das Biegemoment im Riegel beträgt  $M_{y,d} = 200kNm$ . Zusätzlich wird eine Stützennormalkraft von  $N_d = 700kN$  berücksichtigt.

Material:

- $f_{y,k} = 35.5 \text{ kN/cm}^2$
- $\gamma_M = 1.0$

Zugkraft im Riegel-Obergurt:

$$Z_{Ro} = \frac{M_{y,d}}{h - t} = 724.6 \text{ kN} \quad (20.37)$$

Zugkraft je Schraube:

$$Z_S = \frac{Z_{Ro}}{4} = 181.2 \text{ kN} \quad (20.38)$$

## 20.5.2 Berechnung der Traglast des unversteiften Stützenflansches

### Berechnung nach Eurocode 3

Die Vergleichsrechnung erfolgt nach Eurocode 3: Bemessung von Stahlbauten, Teil 1-8: Bemessung von Anschlüssen, Ausgabe 2005 [EN 1993-1-8:2005].

Nach Eurocode 3 wird ein äquivalenter T-Stummel ermittelt, an dem die Auswertung nach Fließgelenktheorie erfolgt. Da an dieser Stelle nur der Stützenflansch und nicht die Schrauben betrachtet werden, wird nur der Versagensmodus 1 nach Tabelle 20.1 untersucht.

Vereinfachend wird hier wie auch in der Berechnung mit  $\mathcal{FLX}$  die Dicke des Stützensteges vernachlässigt. Damit ist  $m = 8.0 \text{ cm}$  und  $e = 7.0 \text{ cm}$  sowie  $p = 100 \text{ mm}$ .

Der Querschnitt des T-Stummels ist in Tabelle 20.2 unten dargestellt. Die Länge des T-Stummels  $l_{eff}$  ist aus den Formeln des Eurocodes zu berechnen. Bei Betrachtung einer einzelnen Schraubenreihe ist nach Tabelle 20.2:

$$l_{eff,1} = \min \left( \begin{array}{c} 2\pi m \\ \pi m + 2e_1 \\ 4m + 1.25e \\ 2m + 0.625e + e_1 \end{array} \right) = 274 \text{ mm} \quad (20.39)$$

Das plastische Moment ist also:

$$M_{pl,1,Rd} = \frac{1}{4} l_{eff,1} \frac{t^2 f_{y,k}}{\gamma_M} = 477 \text{ kNcm} \quad (20.40)$$

Die zulässige Zugkraft für eine Schraubenreihe beträgt:

$$F_{T,1,Rd} = \frac{4M_{pl,1,Rd}}{m} = 238.3 \text{ kN} \quad (20.41)$$

Damit erhält man den Traglastfaktor zu

$$\lambda_{T,EC,1} = \frac{2F_{T,1,Rd}}{Z_{Ro}} = 0.658 \quad (20.42)$$

Die Länge des T-Stummels bei Betrachtung einer Schraubenreihe als Teil einer Gruppe von Schraubenreihen ist nach Tabelle 20.2:

$$l_{eff,1} = \min \begin{pmatrix} \pi m + p \\ 2e_1 + p \\ 2m + 0.625e + 0.5p \\ e_1 + 0.5p \end{pmatrix} = 120mm \quad (20.43)$$

Das plastische Moment ist also:

$$M_{pl,1,Rd} = \frac{1}{4} l_{eff,1} \frac{t^2 f_{y,k}}{\gamma_M} = 209kNcm \quad (20.44)$$

Die zulässige Zugkraft für eine Schraubenreihe beträgt:

$$F_{T,1,Rd} = \frac{4M_{pl,1,Rd}}{m} = 104.5kN \quad (20.45)$$

Damit erhält man den Traglastfaktor zu

$$\lambda_{T,EC,2} = \frac{2F_{T,1,Rd}}{Z_{Ro}} = 0.288 \quad (20.46)$$

Der Traglastfaktor nach EC3 ergibt sich als das Minimum

$$\lambda_{T,EC} = \min(\lambda_{T,EC,1}, \lambda_{T,EC,2}) = 0.288 \quad (20.47)$$

Maßgebend ist die Betrachtung einer Schraubenreihe als Teil einer Gruppe von Schraubenreihen. Mit dieser Formulierung im Eurocode 3 ist gemeint, dass sich die Versagensform über beide Schraubenreihen der Zugzone erstreckt.

## 20.5 Beispiel 5: Stützenflansch eines steifenlosen Stirnplattenanschlusses

EN 1993-1-8:2005 (D)

Tabelle 6.2 — Tragfähigkeit  $F_{T,Rd}$  eines T-Stummelflansches bei Zugbeanspruchung

	Abstützkkräfte können auftreten, d. h. $L_b \leq L_b^*$		keine Abstützkkräfte
Modus 1	Verfahren 1	Verfahren 2 (alternatives Verfahren)	
ohne Futterplatten	$F_{T,1,Rd} = \frac{4M_{pl,1,Rd}}{m}$	$F_{T,1,Rd} = \frac{(8n - 2e_w)M_{pl,1,Rd}}{2mn - e_w(m+n)}$	$F_{T,1-2,Rd} = \frac{2M_{pl,1,Rd}}{m}$
mit Futterplatten	$F_{T,1,Rd} = \frac{4M_{pl,1,Rd} + 2M_{bp,Rd}}{m}$	$F_{T,1,Rd} = \frac{(8n - 2e_w)M_{pl,1,Rd} + 4nM_{bp,Rd}}{2mn - e_w(m+n)}$	
Modus 2	$F_{T,2,Rd} = \frac{2M_{pl,2,Rd} + n\Sigma F_{t,Rd}}{m+n}$		
Modus 3	$F_{T,3,Rd} = \Sigma F_{t,Rd}$		

Modus 1: Vollständiges Fließen des Flansches  
Modus 2: Schraubenversagen gleichzeitig mit Fließen des Flansches  
Modus 3: Schraubenversagen

$L_b$  — Dehnlänge der Schraube, angesetzt mit der gesamten Klemmlänge (Gesamtdicke des Blechpakets und der Unterlegscheiben), plus der halben Kopfhöhe und der halben Mutterhöhe oder  
— Dehnlänge der Ankerschraube, angesetzt mit der Summe aus dem 8fachen Schraubendurchmesser, den Dicken der Mörtelschicht, der Fußplatte, der Unterlegscheiben und der halben Mutterhöhe

$L_b^* = \frac{8,8 m^3 A_s}{\Sigma l_{eff,1} l_f}$

$F_{T,Rd}$  Bemessungswert der Zugtragfähigkeit eines T-Stummelflansches  
 $Q$  Abstützkraft

$M_{pl,1,Rd} = 0,25 \Sigma l_{eff,1} l_f^2 f_y / \gamma_{M0}$   
 $M_{pl,2,Rd} = 0,25 \Sigma l_{eff,2} l_f^2 f_y / \gamma_{M0}$   
 $M_{bp,Rd} = 0,25 \Sigma l_{eff,1} l_{bp}^2 f_{y,bp} / \gamma_{M0}$   
 $n = e_{min}$  jedoch  $n \leq 1,25m$

$F_{t,Rd}$  Bemessungswert der Zugtragfähigkeit der Schraube, siehe Tabelle 3.4;  
 $\Sigma F_{t,Rd}$  Summe aller  $F_{t,Rd}$  der Schrauben in dem T-Stummel;  
 $\Sigma l_{eff,1}$  Wert für  $\Sigma l_{eff}$  für Modus 1;  
 $\Sigma l_{eff,2}$  Wert für  $\Sigma l_{eff}$  für Modus 2;  
 $e_{min}$ ,  $m$  und  $l_f$  siehe Bild 6.2.

$f_{y,bp}$  Streckgrenze der Futterplatten;  
 $l_{bp}$  Dicke der Futterplatten;  
 $e_w = d_w/4$ ;  
 $d_w$  Durchmesser der Unterlegscheibe oder Eckmaß des Schraubenkopfes oder der Mutter, je nach Maßgeblichkeit.

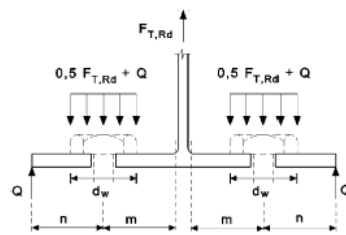


Tabelle 20.1: Eurocode 3, EN 1993-1-8:2005, Auszug

EN 1993-1-8:2005 (D)

Tabelle 6.4 — Wirksame Längen für nicht ausgesteifte Stützenflansche

Lage der Schraubenreihe	Schraubenreihe einzeln betrachtet		Schraubenreihe als Teil einer Gruppe von Schraubenreihen	
	Kreisförmiges Muster $\ell_{\text{eff,cp}}$	Nicht kreisförmiges Muster $\ell_{\text{eff,nc}}$	Kreisförmiges Muster $\ell_{\text{eff,cp}}$	Nicht kreisförmiges Muster $\ell_{\text{eff,nc}}$
Innere Schraubenreihe	$2\pi m$	$4m + 1,25e$	$2p$	$p$
Äußere Schraubenreihe	der kleinere Wert von: $2\pi m$ $\pi m + 2e_1$	der kleinere Wert von: $4m + 1,25e$ $2m + 0,625e + e_1$	der kleinere Wert von: $\pi m + p$ $2e_1 + p$	der kleinere Wert von: $2m + 0,625e + 0,5p$ $e_1 + 0,5p$
Modus 1:	$\ell_{\text{eff,1}} = \ell_{\text{eff,nc}}$ jedoch $\ell_{\text{eff,1}} \leq \ell_{\text{eff,cp}}$		$\Sigma \ell_{\text{eff,1}} = \Sigma \ell_{\text{eff,nc}}$ jedoch $\Sigma \ell_{\text{eff,1}} \leq \Sigma \ell_{\text{eff,cp}}$	
Modus 2:	$\ell_{\text{eff,2}} = \ell_{\text{eff,nc}}$		$\Sigma \ell_{\text{eff,2}} = \Sigma \ell_{\text{eff,nc}}$	

Tabelle 20.2: Eurocode 3, EN 1993-1-8:2005, Auszug



### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Die Spannungen in der Stütze infolge der Normalkraft  $N_d$  betragen  $\sigma = 6.2 \text{ kN/cm}^2$ . Für den Stützenflansch als Platte entspricht das einer Plattenmembrankraft von  $n_x = 8.7 \text{ kN/cm}$ . Die Dicke des Steges wird in der Berechnung vernachlässigt.

Für die Berechnung im Programm  $\mathcal{FLX}$  wurde ein 100cm langer Abschnitt des Stützenflansches untersucht (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3). In Abbildung 20.33 ist oben der eingespannte Rand des Stützenflansches am Stützensteg, unten ist der freie Rand.

```
_bsp05a_EC3.flx
Ai = 1357.4980525
Aa = 2711.9832883
Traglastfaktor = 0.5006
```

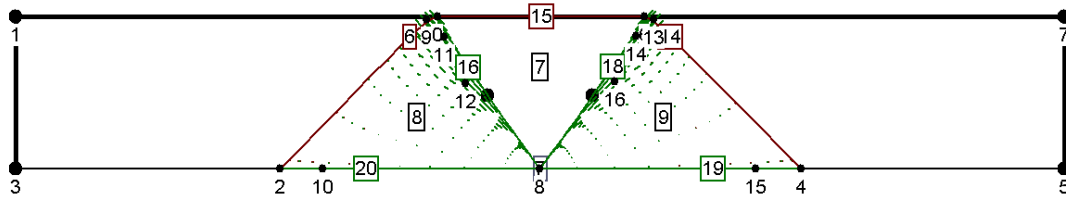


Abbildung 20.33: Fließlinienmuster für den unversteiften Anschluss, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Der errechnete Traglastfaktor ist

$$\lambda_T = 0.501 \quad (20.48)$$

Der errechnete Traglastfaktor ist größer als der Traglastfaktor mit den Formeln aus dem Eurocode 3. Dies war zu erwarten, da für die EC3-Formeln Vereinfachungen vorgenommen wurden und diese Formeln stets auf der sicheren Seite liegen müssen.

### 20.5.3 Ergänzung einer Rippe

Der unversteifte Stützenflansch besitzt für den Anschluss keine ausreichende Tragfähigkeit. Daher soll untersucht werden, wie sich der Traglastfaktor verändert, wenn eine Rippe in der Stütze in Höhe des Riegelobergurtes eingefügt wird.

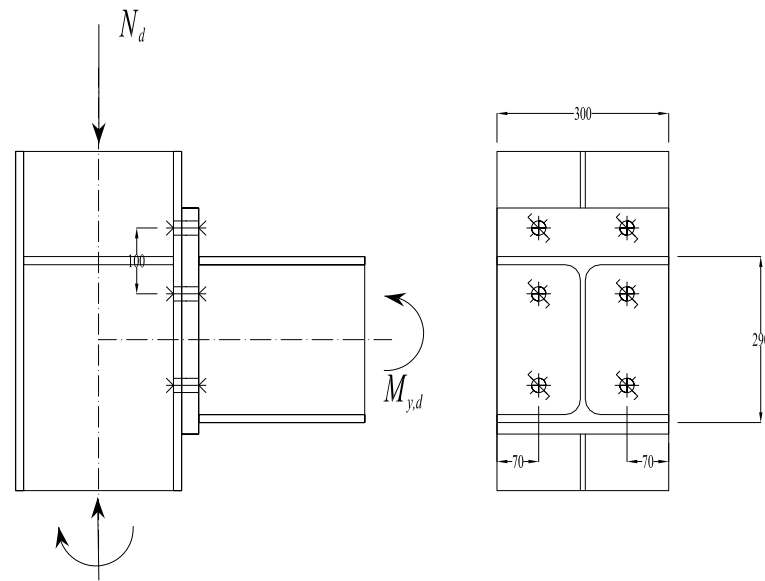


Abbildung 20.34: versteifter Stirnplattenanschluss

### Berechnung nach Eurocode 3

Durch die Rippe können sich keine Versagensformen ausbilden, die beide Schraubenreihen im Zugbereich überspannen. Beim Nachweis mit den Formeln aus dem Eurocode 3 Teil 1-8 müssen nur äquivalente T-Stummel betrachtet werden, die aus der Betrachtung einer einzelnen Schraubenreihe resultieren.

Der Traglastfaktor ergibt sich also zu

$$\lambda_{T,EC} = \lambda_{T,EC,1} = 0.658 \quad (20.49)$$

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Bei der Berechnung im Programm  $\mathcal{FLX}$  wird die Rippe als Einspannung betrachtet (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) und nur das halbe System modelliert. Der Stützenflansch wird mit einer Länge von 50cm modelliert. Oben ist der eingespannte Rand des Stützenflansches am Stützensteg, unten ist der freie Rand. Die Dicke der Rippe wird in der Berechnung vernachlässigt.

Der errechnete Traglastfaktor (Abbildung 20.35) ist jetzt

$$\lambda_T = 1.032 \quad (20.50)$$

Folgt man den Formeln aus dem Eurocode, so besitzt auch der versteifte Anschluss keine ausreichende Tragfähigkeit. Allerdings wird in diesen Formeln die exakte Position der Rippe nicht berücksichtigt. Die Berechnung des Stützenflansches mittels Fließlinientheorie zeigt jedoch, dass dennoch eine ausreichende Tragfähigkeit vorhanden ist.

\_bsp05b\_EC3.flx  
 $A_i = 1408.3372695$   
 $A_a = 1364.1136945$   
 Traglastfaktor = 1.0324

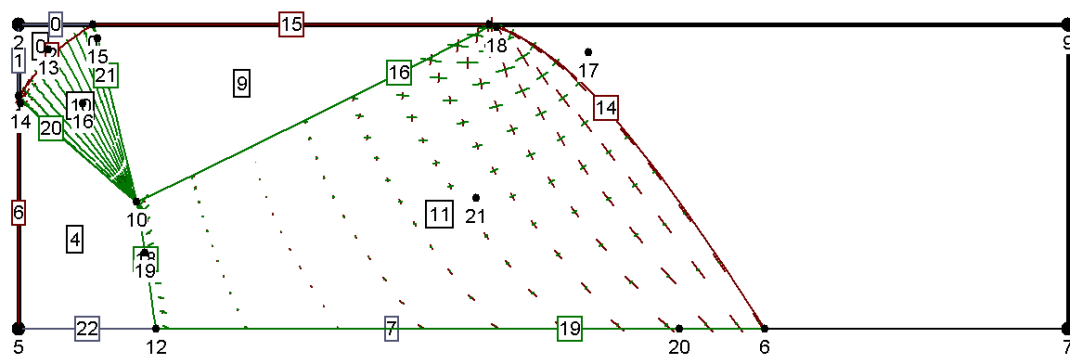


Abbildung 20.35: Fließlinienmuster für den versteiften Anschluss, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

## 20.6 Beispiel 6: Punktgestützte Platte

### 20.6.1 Aufgabenstellung

Eine als unendlich ausgedehnte Platte wird punktförmig in einem Rechteckraster gelagert. Die Platte ist durch eine konstante Flächenlast  $p$  belastet. Für die Berechnung wird unter Ausnutzung der Symmetrie nur ein einzelnes Plattenfeld betrachtet. Das plastische Moment  $m_u^+ = -m_u^- = m_u$  ist in allen Richtungen gleich.

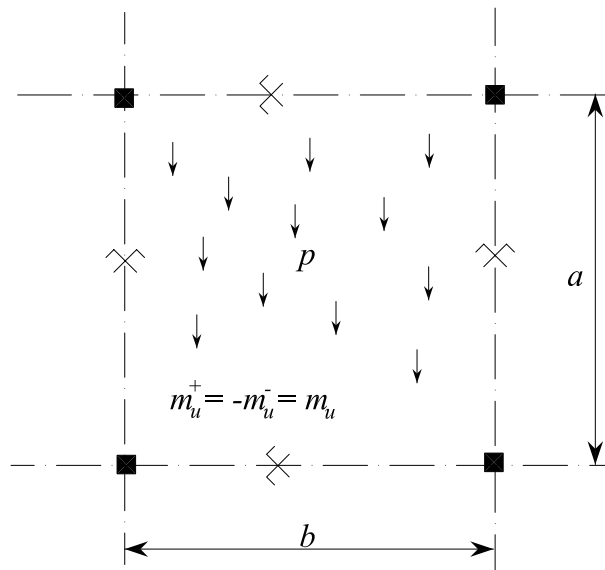


Abbildung 20.36: System und Belastung (dargestellt ist Variante 1)

**Variante 1** Spannweitenverhältnis  $a/b = 1/1$

**Variante 2** Spannweitenverhältnis  $a/b = 1/1.5$

### 20.6.2 Berechnung der Traglast

#### Analytische Lösung

Es werden zwei verschiedene Fließlinienmuster untersucht:

#### Fließlinienmuster 1

Es treten Kreisfächer um die Punktstützungen herum auf (Abbildung 20.37). Die gesamte Platte außerhalb des Fächers verschiebt sich um eine Einheitslänge  $\delta w = 1$  nach unten.

Die virtuelle innere Arbeit erhält man zu

$$-\delta A_i = 2\pi(m_u^+ - m_u^-) = 4\pi m_u \quad (20.51)$$

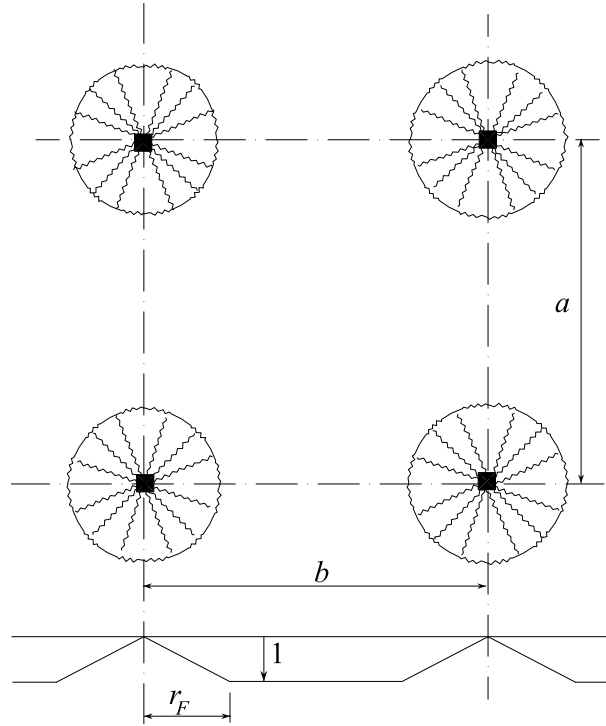


Abbildung 20.37: Fließlinienmuster 1 und virtuelle Verschiebungsfigur

Die virtuelle äußere Arbeit beträgt

$$\delta A_a = p \cdot \left( a \cdot b - \frac{1}{3} \pi r_F^2 \right) \quad (20.52)$$

Die innere Arbeit der Kreisfächer ist unabhängig vom Fächerradius  $r_F$ . Die äußere Arbeit ist um so größer, je kleiner der Fächerradius ist. Das Minimum des Traglastfaktors tritt folglich für  $r_F \rightarrow 0$  auf.

Somit wird die äußere Arbeit maximal:

$$\delta A_a = p \cdot a \cdot b \quad (20.53)$$

Nach Gleichung 3.2 ergibt sich der Traglastfaktor zu

$$\lambda_{T1} = 4\pi \frac{m_u}{p \cdot a \cdot b} \quad (20.54)$$

### Fließlinienmuster 2

Wenn die Punktstützungen in einer Richtung wesentlich dichter zusammen liegen als in der anderen Richtung, so wirken die Stützen wie eine Linienlagerung. Die Platte versagt in Form einer zweiseitig eingespannten Platte (Abbildung 20.38). In Plattenmitte beträgt die virtuelle Verschiebung  $\delta w = 1$  nach unten.

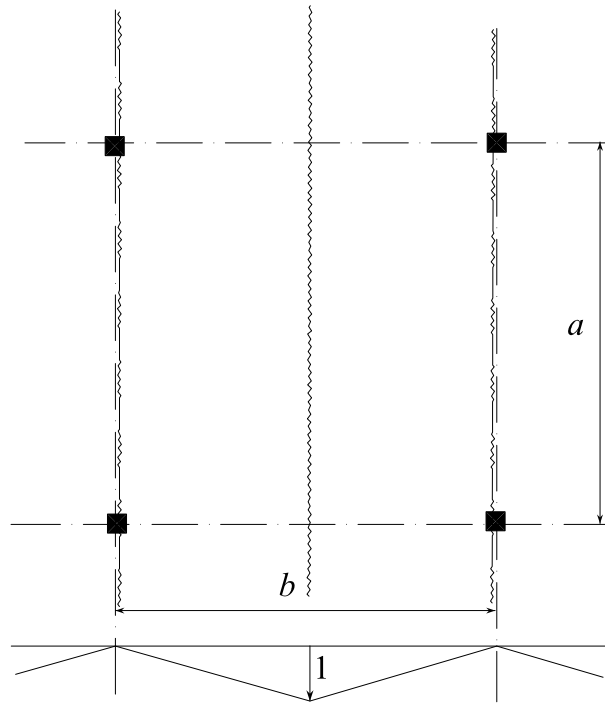


Abbildung 20.38: Fließlinienmuster 2 und virtuelle Verschiebungsfigur

Die virtuelle innere Arbeit erhält man zu

$$-\delta A_i = 2a \frac{2}{b} (m_u^+ - m_u^-) = 8 \frac{a}{b} m_u \quad (20.55)$$

Die virtuelle äußere Arbeit beträgt

$$\delta A_a = \frac{1}{2} p \cdot a \cdot b \quad (20.56)$$

Somit ergibt sich die Traglast zu

$$\lambda_{T2} = 16 \frac{m_u}{p \cdot b^2} \quad (20.57)$$

Setzt man  $\lambda_{T1}$  und  $\lambda_{T2}$  gleich, so findet man das kritische Stützweitenverhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi}{4} \quad (20.58)$$

Wenn  $a < \frac{\pi}{4}b$  ist, so wird das Fließlinienmuster 1 maßgebend, bei  $a > \frac{\pi}{4}b$  ist Fließlinienmuster 2 maßgebend.

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$ für Variante 1

$$b = a \tag{20.59}$$

Die analytische Lösung liefert

$$\begin{aligned} \lambda_{T1} &= 4\pi \frac{m_u}{a^2} = 12.566 \frac{m_u}{p \cdot a^2} \\ \lambda_{T2} &= 16 \frac{m_u}{p \cdot a^2} \end{aligned} \tag{20.60}$$

Das Fließlinienmuster 1 wird maßgebend.

Die  $\mathcal{FLX}$ -Berechnung (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) erfolgt mit  $a = b = 1$  und  $m_u = 1$ .

Traglastfaktor aus der  $\mathcal{FLX}$ -Rechnung:

$$\lambda_T = 12.654 \tag{20.61}$$

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  findet das qualitativ richtige Fließlinienmuster (Abbildungen 20.39 und 20.40). Problematisch ist jedoch, dass der Radius des Fächers gegen Null geht. Das Fächersegment zeigt in diesem Fall ein schlechtes Konvergenzverhalten. Daher weicht der errechnete Traglastfaktor um 0.7% vom Sollwert ab. Je schärfer das Abbruchkriterium für den numerischen Optimierer gesetzt wird, um so kleiner werden die Fließlinienfächer im numerisch ermittelten Fließlinienmuster und das Ergebnis wird genauer.

\_bsp06a\_punktstütz.flx  
Ai = 3.4679877  
Aa = 0.2740565  
Traglastfaktor = 12.6543

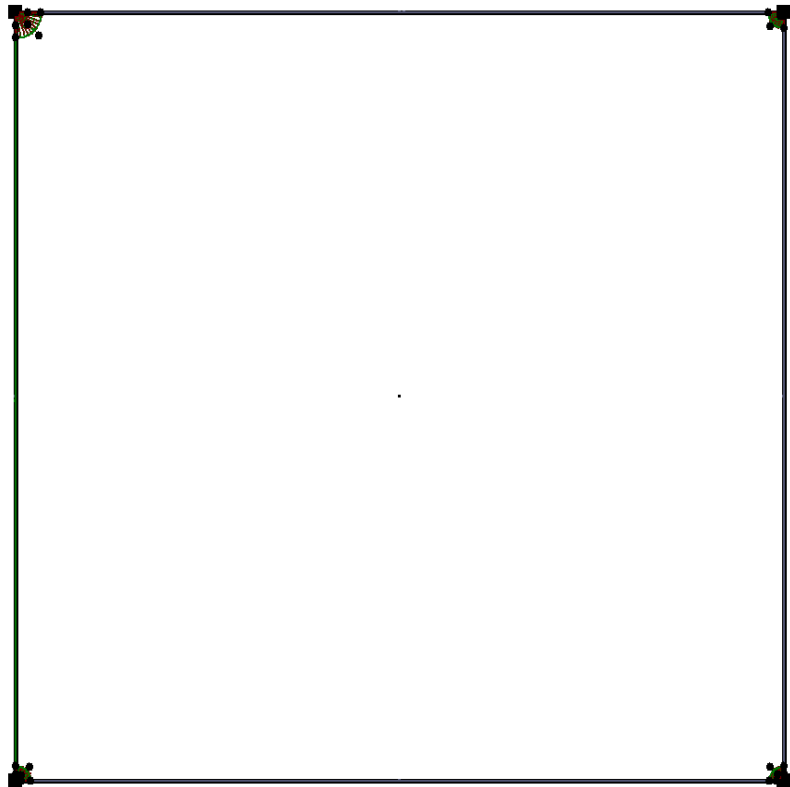


Abbildung 20.39: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$



```
_bsp06a_punktstütz.flx
Ai = 3.4679877
Aa = 0.2740565
Traglastfaktor = 12.6543
```

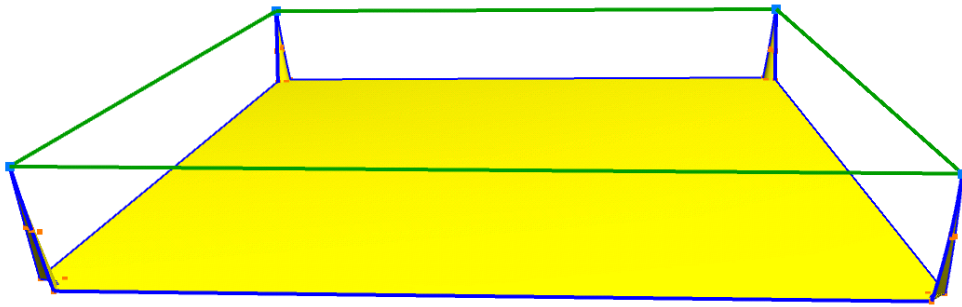


Abbildung 20.40: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$ für Variante 2

In Variante 2 ist

$$b = 1.5a \quad (20.62)$$

Die analytische Lösung liefert

$$\lambda_{T1} = 8.378 \frac{m_u}{p \cdot a^2} \lambda_{T2} = 7.111 \frac{m_u}{p \cdot a^2} \quad (20.63)$$

Das Fließlinienmuster 2 wird also maßgebend.

Die Berechnung im Programm  $\mathcal{FLX}$  erfolgt mit  $a = 1$ ,  $b = 1.5$  und  $m_u = 1$ .

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  findet das richtige Fließlinienmuster und den korrekten Traglastfaktor (Abbildungen 20.41 und 20.42).

Traglastfaktor aus  $\mathcal{FLX}$ :

$$\lambda_T = 7.111 \quad (20.64)$$

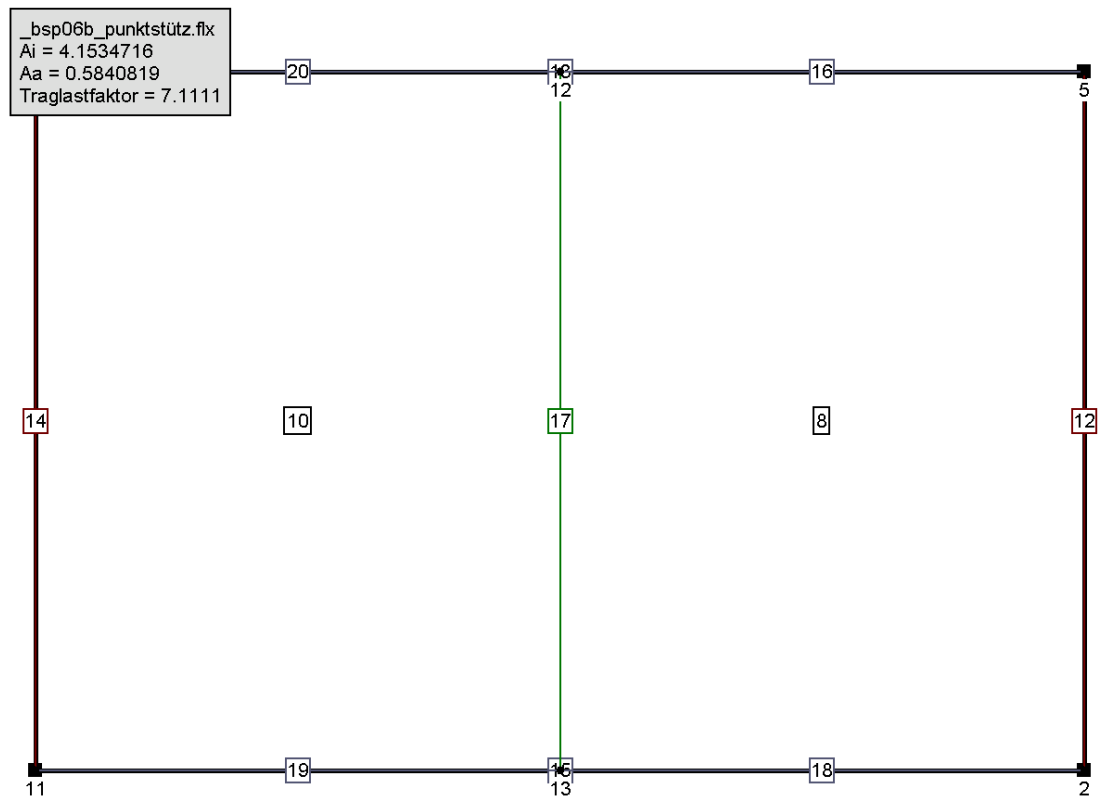


Abbildung 20.41: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

\_bsp06b\_punktstütz.flx  
 $\bar{A}i = 4.1534716$   
 $Aa = 0.5840819$   
Traglastfaktor = 7.1111

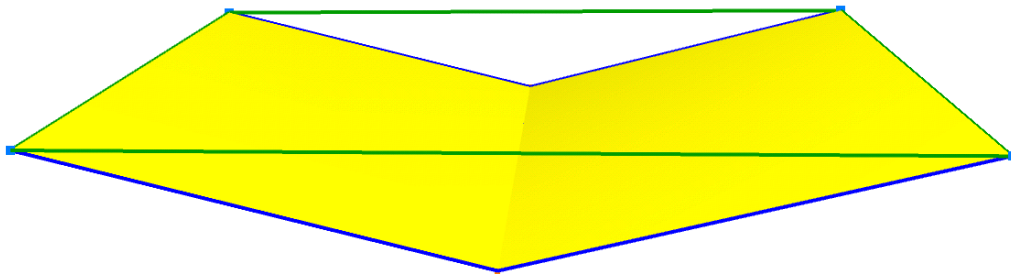


Abbildung 20.42: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

## 20.7 Beispiel 7: Platte mit einspringender Ecke

### 20.7.1 Aufgabenstellung

Untersucht wird eine Platte mit einer einspringenden Ecke. Dieses Beispiel wurde bereits von Ramsay und Johnson [39] mittels computerunterstützter Fließlinientheorie untersucht. Sie verwenden dazu einen von ihnen entworfenen Algorithmus (siehe auch [38]), bei dem der Anwender ein festes Liniennetz vorgeben muss. Die Fließlinien werden nur entlang dieses Netzes gesucht.

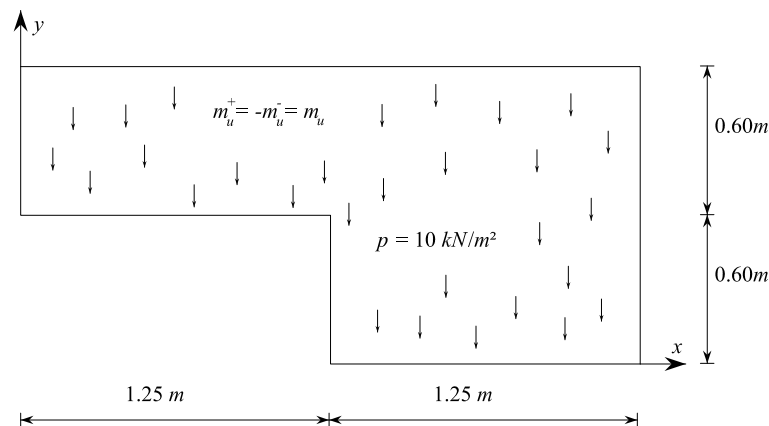


Abbildung 20.43: System

Die Platte wird durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastet. Das plastische Moment  $m_u^+ = -m_u^- = m_u$  ist in allen Richtungen gleich.

Es werden vier unterschiedliche Lagerungsfälle untersucht:

**Variante 1** allseitig gelenkig gelagert

**Variante 2** zweiseitig gelenkig gelagert (Ränder bei  $x = 0m$  und  $x = 2.50m$ )

**Variante 3** dreiseitig gelenkig gelagert (Ränder bei  $x = 0m$ ,  $x = 2.50m$  und  $y = 1.20m$ )

**Variante 4** dreiseitig gelenkig gelagert (wie Variante 3) mit Punktstützung an der einspringenden Ecke

Ramsay und Johnson errechneten für die Lagerungsfälle 2 bis 4 das erforderliche plastische Moment, um die Flächenlast von  $p = 10kN/m^2$  aufnehmen zu können. Zwecks Vergleichbarkeit wird dieser Wert in einen Traglastfaktor umgerechnet, der einem plastischen Grenzmoment von  $m_u = 1kNm/m$  entspricht.

Lagerungsfall	erf. $m_u$ [kNm/m]	$\lambda_T$ ( $m_u = 1$ )
2	11.72	0.085
3	1.70	0.588
4	0.76	1.316

## 20.7.2 Variante 1 - allseitig gelenkige Lagerung

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Dieser Lagerungsfall wird zusätzlich zu den von Ramsay/Johnson berechneten Lagerungsfällen untersucht.

Das Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet einen Traglastfaktor (siehe Abbildung 20.44) von

$$\lambda_T = 1.769 \quad (20.65)$$

Das Einfügen des Fächersegments in Phase 3 hat in diesem Beispiel nur einen Einfluss von 0.2% (siehe Abbildung 20.46).

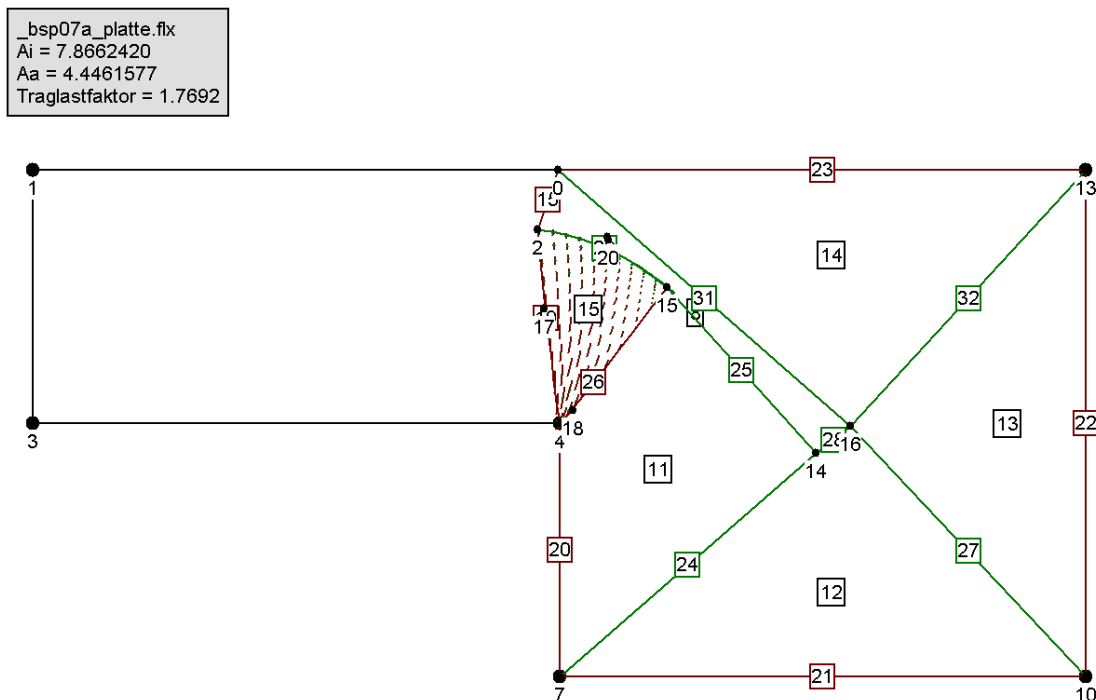


Abbildung 20.44: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

\_bsp07a\_platte.flx  
 $A_i = 7.8662420$   
 $A_a = 4.4461577$   
 Traglastfaktor = 1.7692

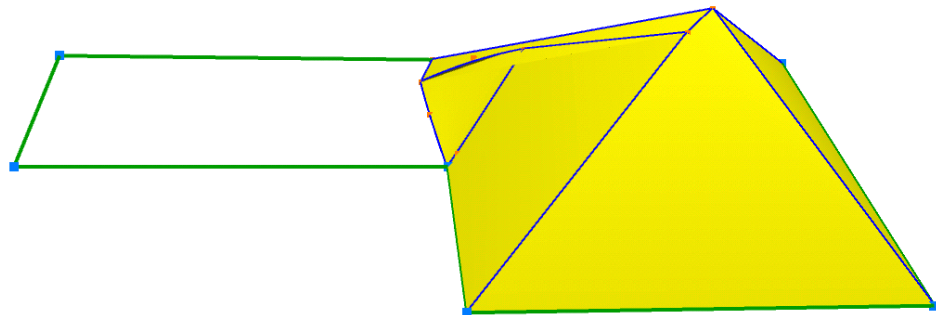


Abbildung 20.45: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

\_bsp07a\_platte.flx  
 $A_i = 7.8686714$   
 $A_a = 4.4397354$   
 Traglastfaktor = 1.7723

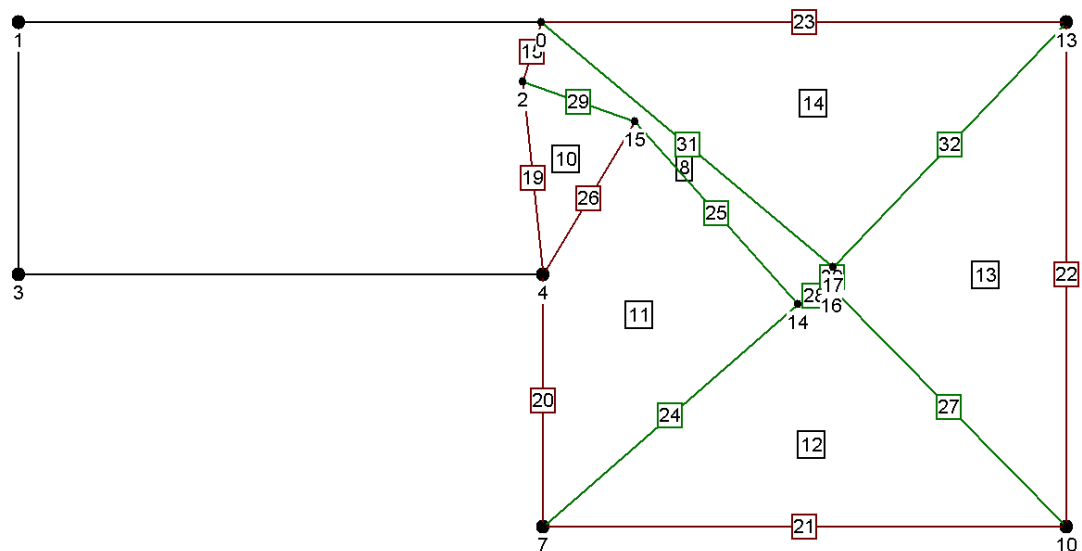


Abbildung 20.46: Fließlinienmuster am Ende von Phase 1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

### 20.7.3 Variante 2 - zweiseitige Lagerung

#### Analytische Lösung

Für dieses Beispiel ist die analytische Lösung sehr leicht zu finden. Gleichzeitig lässt sich anhand der analytischen Lösung gut veranschaulichen, warum dieser Lagerungsfall problematisch für die numerische Optimierung ist.

Das Fließlinienmuster besteht aus zwei ebenen Plattensegmenten, die ihre Rotationsachsen an den gelagerten Rändern besitzen. Innere Arbeit wird nur an der Fließlinie im Platteninneren verrichtet. Die Fließlinie verläuft in Richtung der  $y$ -Achse. Die  $x$ -Koordinate der Fließlinie wird mit  $x_F$  bezeichnet.

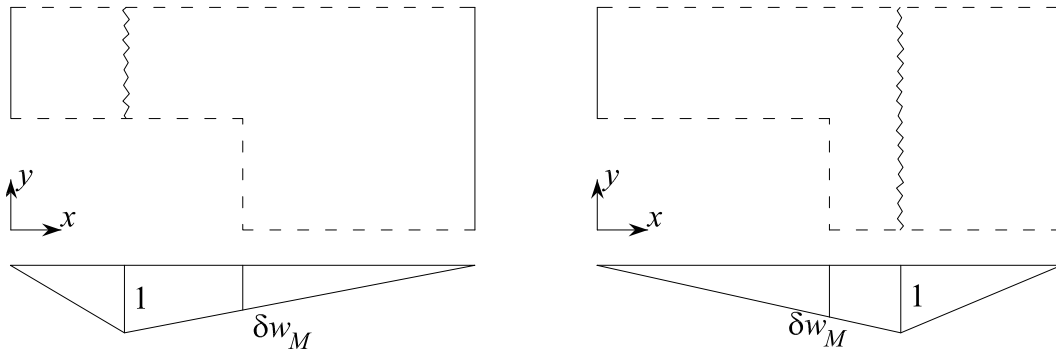


Abbildung 20.47: analytische Lösung - Fließlinienmuster und virtuelle Verschiebungsfigur

1. Fall:  $x_F < 1.25$

(alle Einheiten in  $[m]$  und  $[kN]$ )

virtuelle Verschiebung in Plattenmitte:

$$\delta w_M = \frac{1.25}{2.5 - x_F} \quad (20.66)$$

äußere Arbeit:

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \left( \frac{1}{2} \cdot 0.6 \cdot x_F + \frac{1 + \delta w_M}{2} \cdot 0.6 \cdot (1.25 - x_F) + \frac{\delta w_M}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.25 \right) \cdot p \\ &= 0.1875 \frac{25 - 8x_F}{5 - 2x_F} \cdot p \end{aligned} \quad (20.67)$$

innere Arbeit:

$$\begin{aligned} -\delta A_i &= 0.6 \cdot \left( \frac{1}{x_F} + \frac{1}{2.5 - x_F} \right) \cdot m_u \\ &= 3.0 \frac{m_u}{x_F(5 - 2x_F)} \end{aligned} \quad (20.68)$$

Traglastfaktor für  $m_u = 1$  und  $p = 10$ :

$$\lambda_T = \frac{1.6}{x_F(25 - 8x_F)} \quad (20.69)$$

2. Fall:  $x_F > 1.25$

virtuelle Verschiebung in Plattenmitte:

$$\delta w_M = \frac{1.25}{x_F} \quad (20.70)$$

äußere Arbeit:

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \left( \frac{\delta w_M}{2} \cdot 0.6 \cdot 1.25 + \frac{\delta w_M + 1}{2} \cdot 1.2 \cdot (x_F - 1.25) + \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 2.5 - x_F \right) \cdot p \\ &= 0.009375 \frac{16x_F - 5}{x_F} \cdot p \end{aligned} \quad (20.71)$$

innere Arbeit:

$$\begin{aligned} -\delta A_i &= 1.2 \cdot \left( \frac{1}{x_F} + \frac{1}{2.5 - x_F} \right) \cdot m_u \\ &= 6.0 \frac{m_u}{x_F(5 - 2x_F)} \end{aligned} \quad (20.72)$$

Traglastfaktor für  $m_u = 1$  und  $p = 10$ :

$$\lambda_T = \frac{6.4}{(16x_F - 5)(5 - 2x_F)} \quad (20.73)$$

Der Traglastfaktor in Abhängigkeit von  $x_F$  ist in Abbildung 20.48 dargestellt.

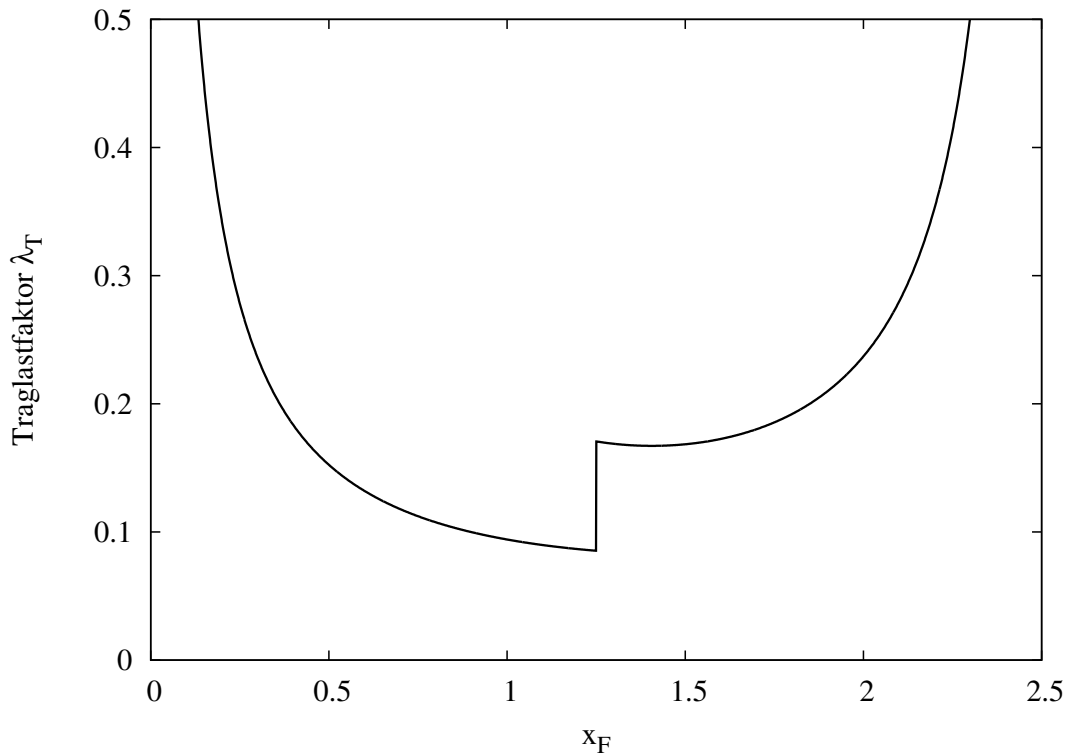
Die Traglast besitzt ihr Minimum bei  $x_F = 1.25$  mit  $\lambda_T = 0.0853$ . An dieser Stelle ist die Funktion der Traglast jedoch unstetig und die Ableitung am Minimumspunkt ist nicht Null. Zusätzlich gibt es ein lokales Minimum bei  $x_F = 1.406$  mit  $\lambda_T = 0.1672$ . An diesem lokalen Minimum wird die Ableitung des Traglastfaktors gleich Null. Ein Optimierungslauf, der sich dem Minimum von rechts nähert, kann das globale Minimum nicht finden.

### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Der vom Programm  $\mathcal{FLX}$  (siehe Abbildung 20.49) errechnete Traglastfaktor stimmt mit der Berechnung von Ramsay/Johnson und der analytischen Lösung überein.

$$\lambda_T = 0.085 \quad (20.74)$$



Abbildung 20.48: analytische Lösung in Abhängigkeit von  $x_F$ 

Gelegentlich konvergiert die numerische Berechnung jedoch auch gegen das oben beschriebene lokale Minimum (siehe Abbildung 20.51). Um solche lokalen Minima ausschließen zu können, sollten mehrere Optimierungsläufe (auch mit verschiedenen Optimierungsalgorithmen) durchgeführt werden. Alternativ können auch andere Optimierungsalgorithmen eingesetzt werden, die weniger empfindlich für lokale Minima sind. Derartige Optimierer benötigen aber in der Regel ein Vielfaches an Rechenzeit im Vergleich zu den in  $\mathcal{FLX}$  implementierten Optimierungsalgorithmen.

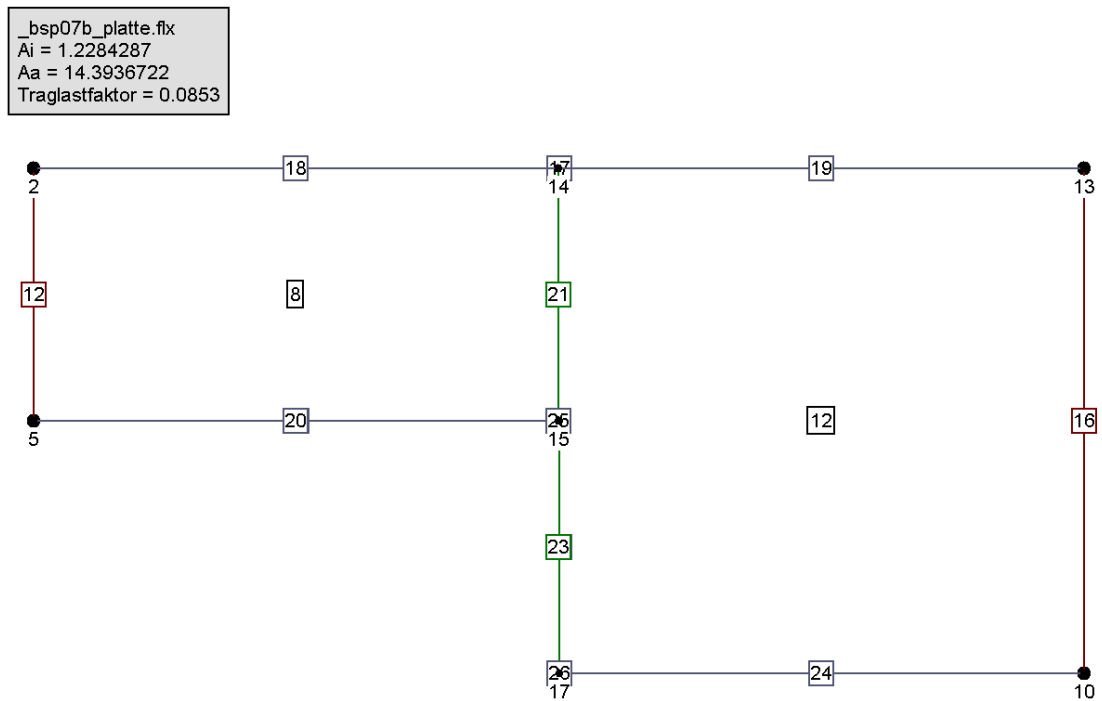


Abbildung 20.49: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

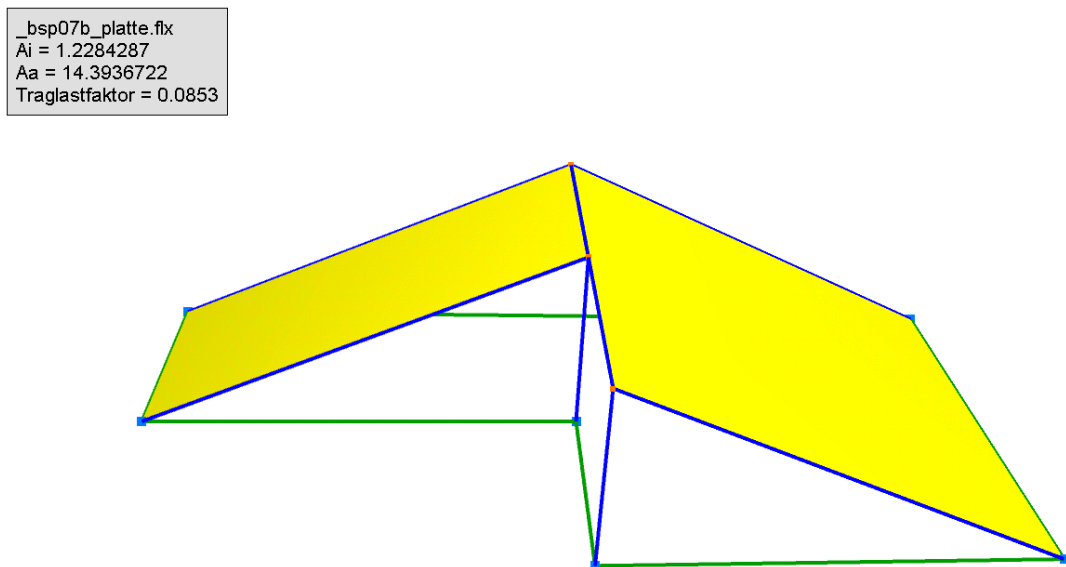
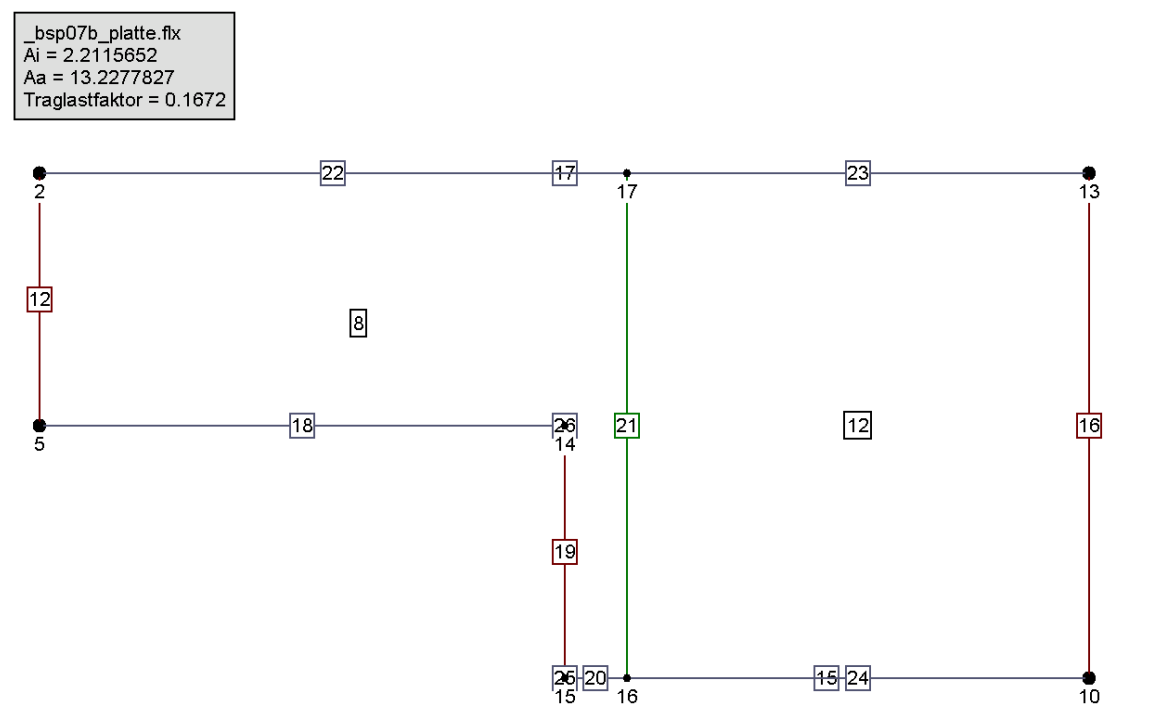


Abbildung 20.50: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$



### 20.7.4 Variante 3 - dreiseitige Lagerung

#### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Der vom Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnete Traglastfaktor (siehe Abbildung 20.52) zeigt, dass die Berechnung von Ramsay/Johnson weit auf der unsicheren Seite liegt:

$$\lambda_T = 0.422 \quad (20.75)$$

Im Vergleich dazu hatten Ramsay/Johnson mit erf.  $m_u = 1.70$  (bzw. umgerechnet  $\lambda_T = 0.588$ ) einen wesentlich höheren Traglastfaktor ermittelt. Der Ansatz, Fließlinien nur entlang eines starren Netzes zu suchen, ist somit schon für derart simple Probleme zu unflexibel. Abbildung 20.53 zeigt das von Ramsay und Johnson angegebene Fließlinienmuster.

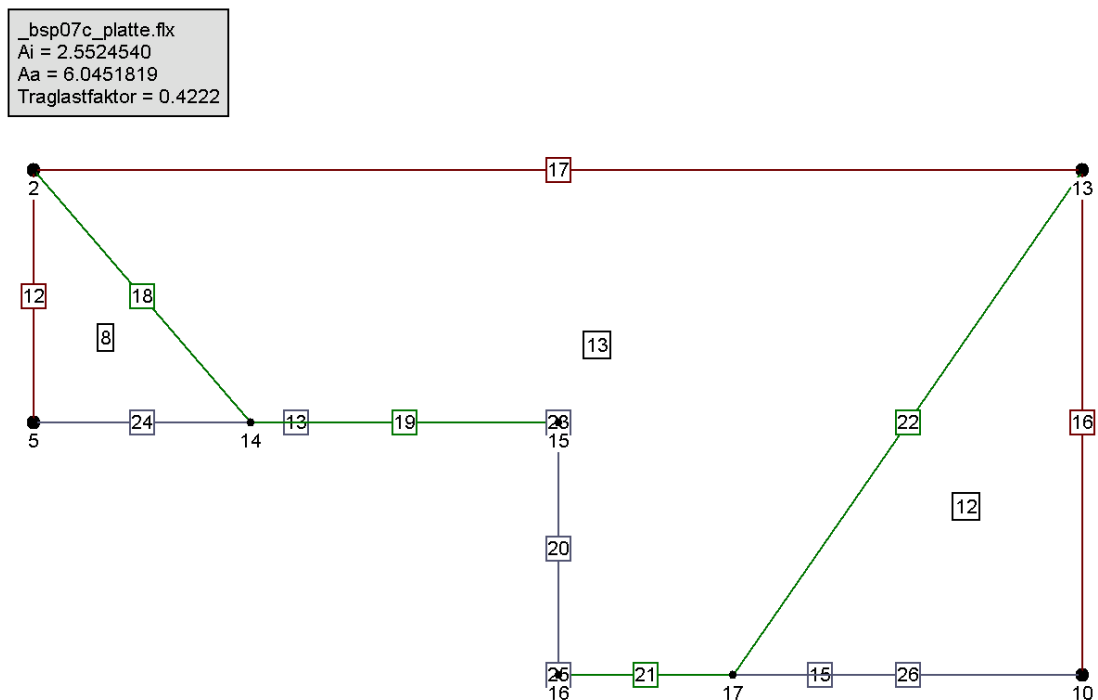


Abbildung 20.52: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Auch für diesen Lagerungsfall existiert ein lokales Minimum (Abbildung 20.54), gegen das die numerische Optimierung gelegentlich konvergieren kann. Dies zeigt, dass im Optimierungsalgorithmus geeignete Mechanismen zu implementieren sind, die lokale Minima möglichst vermeiden.

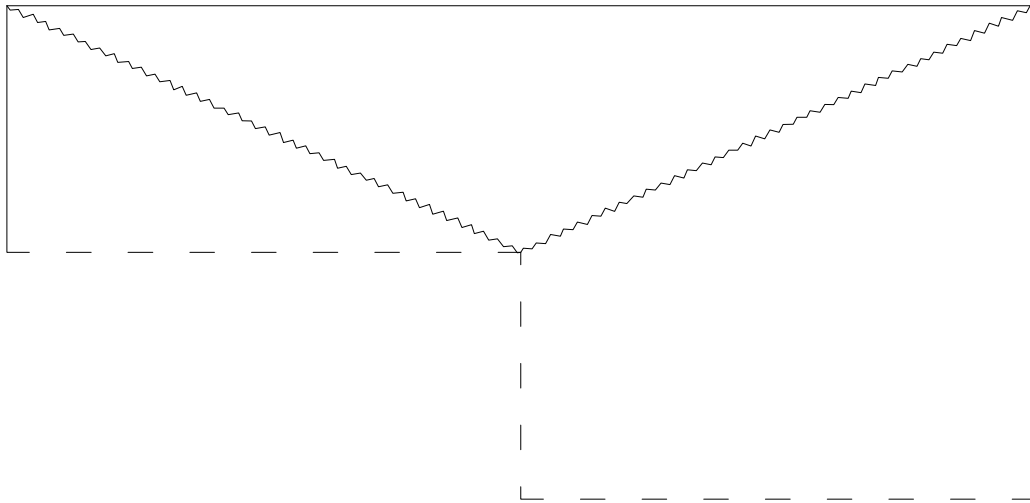


Abbildung 20.53: Fließlinienmuster nach Ramsay/Johnson

\_bsp07c\_platte.flx  
 $A_i = 3.6905765$   
 $A_a = 8.2834819$   
 Traglastfaktor = 0.4455

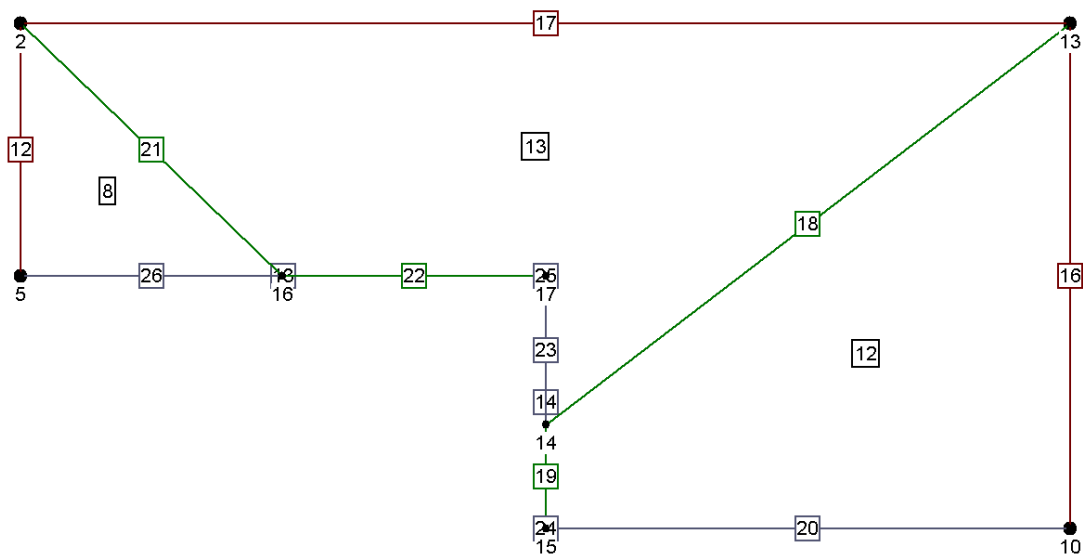


Abbildung 20.54: Fließlinienmuster mit lokalem Minimum der Traglast, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

### 20.7.5 Variante 4 - dreiseitige Lagerung und Punktstützung unter der einspringenden Ecke

#### Numerische Lösung mit $\mathcal{FLX}$

Auch dieses Beispiel zeigt, dass der von Ramsay/Johnson errechnete Traglastfaktor mit  $\lambda_T = 1.36$  weit auf der unsicheren Seite liegt. Das Programm  $\mathcal{FLX}$  (Eingabedatei siehe Anhang A.2.3) errechnet einen Traglastfaktor (siehe Abbildung 20.55) von

$$\lambda_T = 0.878 \quad (20.76)$$

Der Ansatz von Ramsay und Johnson, ein starres Liniennetz als Grundlage für das Fließlinienmuster zu wählen, erweist sich auch in diesem Fall als zu unflexibel. Abbildung 20.57 zeigt das von Ramsay/Johnson als Lösung angegebene Fließlinienmuster.

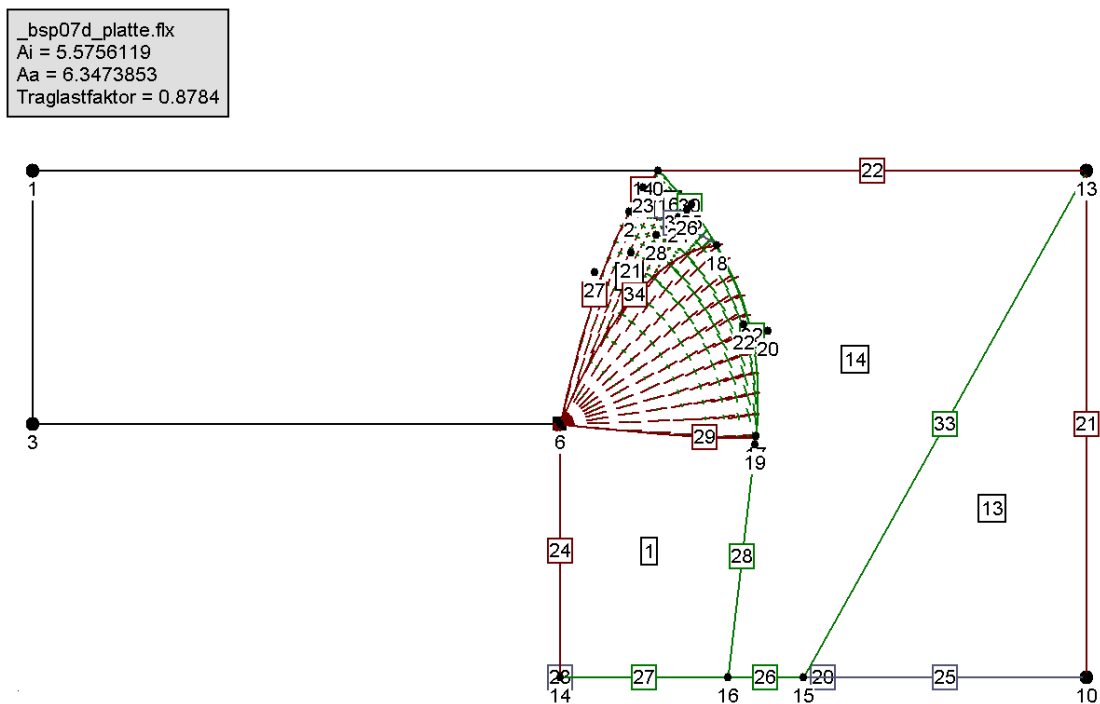


Abbildung 20.55: Fließlinienmuster, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$

Das Einfügen des Fächers in Phase 3 macht in diesem Fall gegenüber der Phase 1 einen Unterschied von 3.3% aus.

\_bsp07d\_platte.fix  
 $A_i = 5.5756119$   
 $A_a = 6.3473853$   
 Traglastfaktor = 0.8784

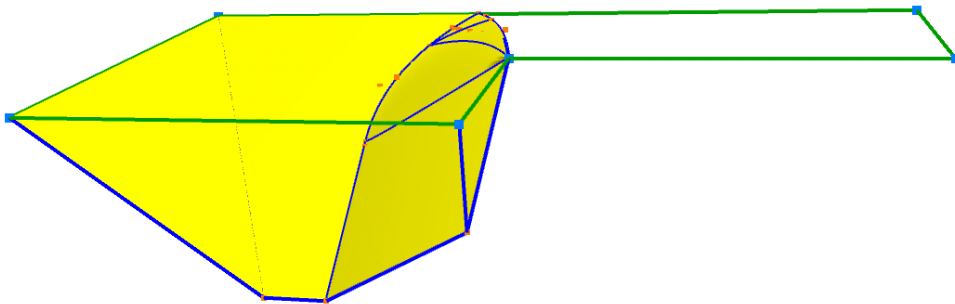


Abbildung 20.56: 3D-Darstellung der virtuellen Verschiebungsfigur aus  $\mathcal{FLX}$

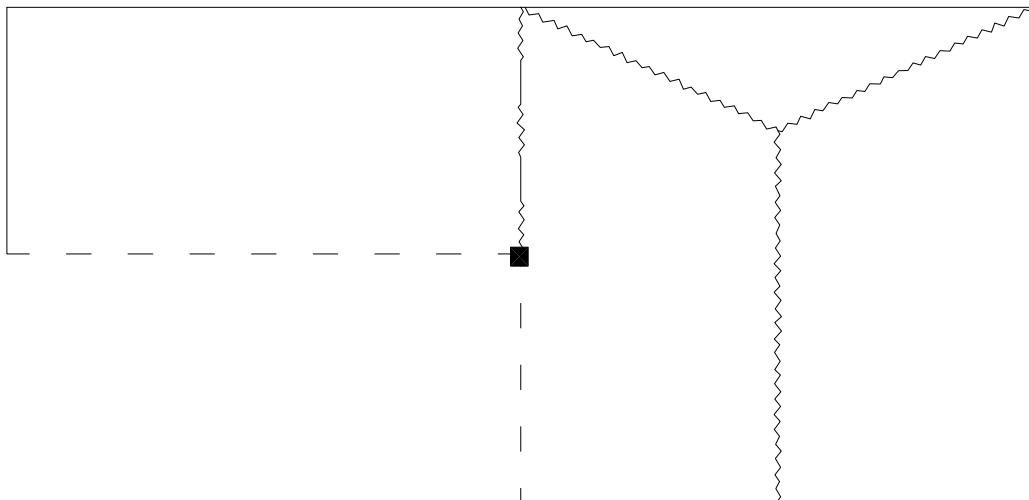


Abbildung 20.57: Fließlinienmuster nach Ramsay/Johnson

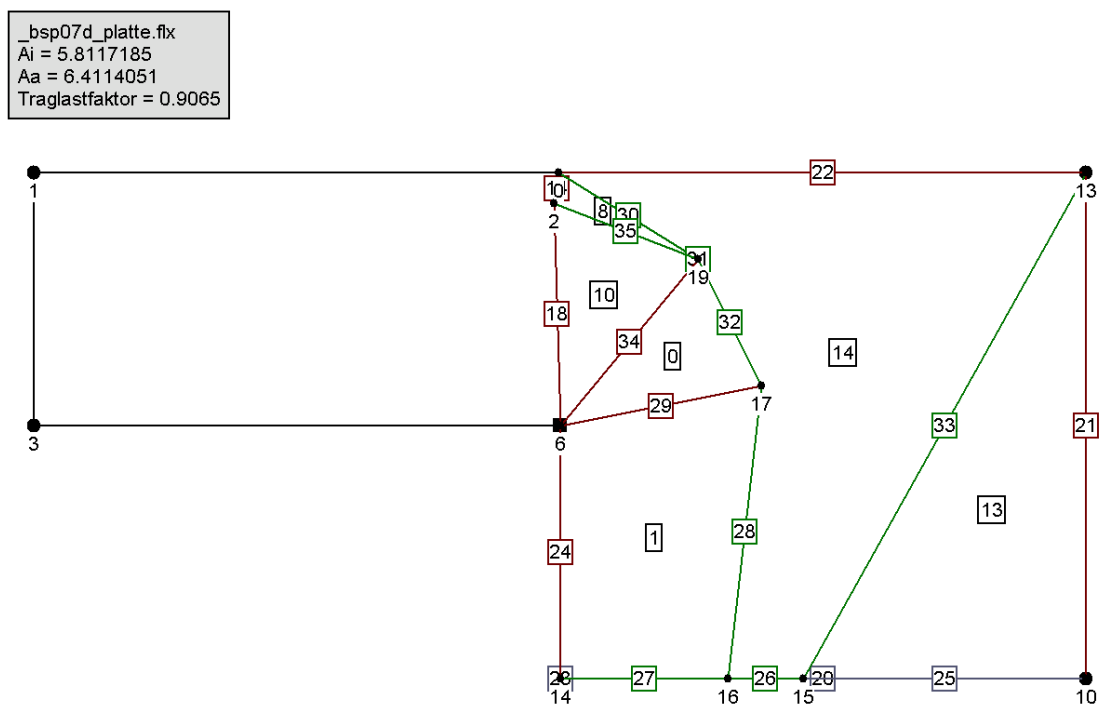


Abbildung 20.58: Fließlinienmuster am Ende von Phase 1, Darstellung aus  $\mathcal{FLX}$



## 21 Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die rechnergestützte Traglastberechnung von Platten mit beliebiger Lagerung, Belastung und Werkstoffverhalten nach der Fließlinientheorie.

Besondere Aufmerksamkeit wurde dabei sogenannten Fließlinienfächern gewidmet, wie sie in Plattenecken und unter Einzellasten entstehen. Diese wurden bisher entweder durch eine große Anzahl einzelner gerader Fließlinien angenähert, oder aber gänzlich vernachlässigt. In der vorliegenden Arbeit wurde dazu ein Fächerelement entwickelt, durch das ein Fließlinienfächer mit nur einem Element beschrieben werden kann. Die neuen Fächersegmente führen zu einer wesentlich höheren Genauigkeit bei wesentlich geringeren Rechenzeiten.

Um die Ergebnisse der Fächersegmente für anisotrope Platten zu optimieren, wurde eine verbesserte Transformationsregel entworfen, die gegenüber der Transformationsregel von Wood den Vorteil hat, arbeitskonsistent zu sein. So kann diese Transformationsregel anstatt auf die gesamte Platte auch auf einzelne Plattenbereiche angewandt werden.

Den zweiten Schwerpunkt der Arbeit bildet die rechnergestützte, automatisierte Ermittlung des maßgebenden Fließlinienmusters. Dazu wurde ein Katalog von Rand- und Eckgruppen erstellt, aus welchen das Fließlinienmuster für beliebige Platten zusammengesetzt wird. Durch die anschließende mathematische Optimierung wird das Anfangs-Fließlinienmuster an die aktuelle Geometrie- und Belastungssituation angepasst. Um Schwachstellen der numerischen Optimierung bei Unstetigkeiten der zu optimierenden Zielfunktion zu umgehen, wird durch geeignete Maßnahmen an kritischen Punkten in den Optimierungsablauf eingegriffen. Dabei wird das Fließlinienmuster angepasst und das Konvergenzverhalten zu verbessern.

Zur Verifizierung des entwickelten Verfahrens und zur Demonstration des breiten Anwendungsspektrums werden schließlich zahlreiche Beispiele untersucht und mit analytischen und numerischen Lösungen aus der Literatur verglichen. Die errechneten Ergebnisse zeigen im Vergleich nicht nur eine gute Übereinstimmung, sondern führen für einzelne Probleme zu verbesserten Lösungen.



# Anhang



## Anhang A

### Benutzung des Programms *FLX*

#### A.1 Benutzeroberfläche



Abbildung A.1: Programm *FLX*

##### A.1.1 Menübefehle

Die Menübefehle des Programms sind weitestgehend selbsterklärend. Daher soll hier nur eine kurze Übersicht über die Menüpunkte gegeben werden. Die wichtigsten Menüpunkte sind auch als Icons in der Icon-Leiste zu finden.

##### **Menü Datei**

**Neu** Erstellt eine leere FLX-Datei

**Öffnen** Öffnet eine bestehende FLX-Eingabedatei. Die Eingabedatei ist eine Datei im XML-FLX-Format und kann mit einem beliebigen Text- oder XML-Editor erstellt und bearbeitet werden. Die Beschreibung der XML-Datenstrukturen erfolgt im Abschnitt A.2.

**Erneut Laden** Lädt die aktuell geöffnete FLX-Eingabedatei erneut vom Datenträger, falls diese zwischenzeitlich verändert wurde.

**Export** Speichert die aktuelle Anzeige des Ausgabefensters. Der Typ der Ausgabe-Datei ist von der aktuellen Anzeige abhängig.

**Berechnen** Für die aktuell geladene Datei wird die Traglast und das dazugehörige Fließlinienmuster berechnet.

**E-Mail Problembericht** Schickt eine e-mail mit der aktuell berechneten Datei an den Autor. Zusätzlich zur FLX-Datei werden einige relevante Debug-Informationen gesendet, außerdem kann eine Beschreibung des auftretenden Fehlers eingegeben werden.

**Letzte Dateien** Eine Liste mit den zuletzt geöffneten Dateien wird angezeigt.

**Beenden** Beendet das Programm.

### Menü Bearbeiten

**Kopieren** Kopiert einen ausgewählten Textabschnitt aus der Textausgabe in die Zwischenablage.

### Menü Ansicht

**Textausgabe** Schaltet in die Textausgabe um.

**2D-Grafikausgabe** Schaltet in die 2D-Grafikausgabe um.

**3D-Grafikausgabe** Schaltet in die 3D-Grafikausgabe um.

**2D-Mausinfo** Schaltet die Größe der Maus-sensitiven Bereiche in der 2D-Grafikausgabe um.

**Symbolleiste** Schaltet die Symbolleiste (Iconleiste) ein bzw. aus.

**Auswahlleiste** Schaltet die Auswahlleiste ein bzw. aus.

**Navigationsleiste** Schaltet die Navigationsleiste ein bzw. aus.

**Statusleiste** Schaltet die Statusleiste ein bzw. aus.

## A.1.2 Aktive Elemente

### Auswahlleiste

Nach der Berechnung der Traglast einer Platte kann in der Auswahlleiste zwischen der Anzeige des Systems, der Anzeige des Endergebnisses oder der Anzeige eines Zwischenergebnisses umgeschaltet werden. Die Menge der auszugebenden Zwischenergebnisse kann über das Attribut **output** in der Eingabedatei gesteuert werden.

## Navigationsleiste

Die Navigationsleiste dient zur einfacheren Navigation in der Textausgabe. Durch anklicken des gewählten Abschnitts wird der Cursor automatisch an den Anfang des gesuchten Abschnitts platziert.

Die Navigationsleiste wird automatisch aktiviert, wenn in den Text-Ausgabemodus umgeschaltet wird, und wird deaktiviert, wenn ein anderer Ausgabemodus gewählt wird.

### A.1.3 Ausgabe-Anzeigen

#### Textausgabe

Es wird eine Text-Datei mit allen für die Beschreibung des Fließlinienmusters erforderlichen Daten angezeigt. Das auszugebende End- oder Zwischenergebnis kann über die Auswahlleiste bestimmt werden.

Das Auffinden gesuchter Daten wird über die Navigationsleiste erleichtert.

Über den Menüpunkt Datei/Export kann die aktuelle Anzeige in eine Text-Datei exportiert werden.

Die Textausgabe kann über den Menüpunkt Anzeige/Textausgabe aktiviert werden.

#### 2D-Grafikausgabe

Je nach Selektion in der Auswahlleiste wird ein Grundriss des zu berechnenden Systems oder das Fließlinienmuster des Endergebnisses oder eines der Zwischenergebnisse angezeigt. In der linken oberen Ecke wird die errechnete Traglast ausgegeben.

Fließlinien mit einem positiven inneren Moment werden grün dargestellt, Fließlinien mit einem negativen Moment rot und Fließlinien mit einem Moment von Null werden hellblau dargestellt. Für Fächersegmente werden die inneren Fließlinien durch kleine Fließlinien-Kreuze symbolisiert. Die Richtung der gekreuzten Linien gibt dabei die Richtung der Fließlinien im jeweiligen Punkt an.

Die Kreuze können wahlweise mit konstanter Größe dargestellt werden oder mit einer Größe proportional zum Betrag der inneren Arbeit, die von dieser Fließlinie in diesem Punkt verrichtet wird. Die Farbe gibt das Vorzeichen des plastischen Moments an. Durch drehen am Maus-Rad kann die Länge der Kreuze skaliert werden.

Die eingezeichneten Kontrollpunkte, sowie die Nummern der Kanten und der Plattensegmente sind Maus-sensitive Bereiche. Beim Anfahren eines solchen Bereichs mit der Maus werden die Informationen zum zugehörigen Element angezeigt. Ein Doppelklick mit der linken Maustaste auf die Nummer eines Fächersegments öffnet eine Anzeige mit den Stützstellen für die numerische Integration.

Über den Menüpunkt Datei/Export kann die aktuelle Anzeige in eine AutoCAD-Script-Datei exportiert werden. Die Script-Datei wurde mit der deutschsprachigen Version von AutoCAD2002 getestet. Für andere AutoCAD-Versionen kann keine Funk-

tionsgarantie gegeben werden. Zusätzlich muss auch die AutoCAD-ARX-Erweiterung JW-Line installiert sein.

Die 2D-Grafikausgabe kann über den Menüpunkt Anzeige/2D-Grafikausgabe aktiviert werden.

### 3D-Grafikausgabe

Je nach Selektion in der Auswahlleiste wird ein dreidimensionales Modell des zu berechnenden Systems, oder des Fließlinienmusters des Endergebnisses oder eines der Zwischenergebnisse angezeigt. In der linken oberen Ecke wird die errechnete Traglast ausgegeben.

Vertikale Dummy-Plattensegmente werden transparent dargestellt.

Durch drehen des Maus-Rades wird die virtuelle Verschiebung skaliert. Durch bewegen der Maus mit gedrückter linker Maustaste kann das Modell gedreht und von allen Seiten betrachtet werden.

Über den Menüpunkt Datei/Export kann die aktuelle Anzeige in eine AutoCAD-Script-Datei exportiert werden. Die Script-Datei wurde mit der deutschsprachigen Version von AutoCAD2002 getestet. Für andere AutoCAD-Versionen kann keine Funktionsgarantie gegeben werden. Zusätzlich muss auch die AutoCAD-ARX-Erweiterung JW-Line installiert sein.

Die 3D-Grafikausgabe kann über den Menüpunkt Anzeige/3D-Grafikausgabe aktiviert werden.

### Anzeige der Integrationspunkte

Es wird eine schematische Darstellung der Stützstellen für die numerische Integration bei der Berechnung der inneren Arbeit eines Fächersegments angezeigt. In der linken oberen Ecke wird die innere Arbeit dieses Plattensegments sowie die Anzahl der verwendeten Stützstellen ausgegeben. Der erste Wert gibt die Anzahl der Stützstellen an, die in die Aufsummierung des Integrals mit einfließen, der zweite Wert ist die Gesamtzahl der berechneten Stützstellen.

Die Stützstellen werden in einem quadratischen Diagramm mit den Koordinatenwerten von 0 bis 1 abgebildet. Die Koordinatenachsen entsprechen den  $t_1$  und  $t_2$  Koordinaten des Fächers. Bei dreieckförmigen Fächern schrumpft einer der dargestellten Ränder zur Länge Null zusammen.

Gelb dargestellte Stützstellen werden zur Berechnung der inneren Arbeit des Fächers genutzt, grau dargestellte Stützstellen werden bei der Fehlerschätzung verwendet und später wieder verworfen.

Der Menüpunkt Datei/Export hat keine Funktion in dieser Anzeige.

Die Anzeige der Integrationspunkte kann nicht über einen Menüpunkt erreicht werden, sondern nur über einen Doppelklick auf die Nummer eines Fächers in der



2D-Grafikausgabe. Durch einen Mausklick in den Grafikbereich wird die Anzeige der Integrationspunkte wieder verlassen.

## A.2 Beschreibung der Eingabedatei

### A.2.1 Aufbau einer XML-Eingabedatei

Die Eingabedatei ist eine XML-Datei im FLX-Format. Die erste Zeile enthält die Standard-XML-Header mit Angaben zur XML-Version (1.0) und zum Character Encoding (iso-8859-1 für den westeuropäischen Sprachraum):

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
```

Das Root-Element einer FLX-Datei heißt **FLX**. Alle Informationen sind als Attribute bzw. als Elementinhalt des Root-Elements definiert.

Es wird zwischen Elementen mit Inhalt und leeren Elementen unterschieden. Alle Elemente besitzen eine Reihe von Attributen. Leere Elemente besitzen folgenden Aufbau:

```
<Elementname Attribut1="..." Attribut2="..." ... Attributn="..." />
```

Elemente mit Inhalt besitzen einen Anfangs- und einen End-Tag. Zwischen diesen Tags befindet sich der Elementinhalt, der aus weiteren Elementen besteht.

```
<Elementname Attribut1="..." Attribut2="..." ... Attributn="...">
    <Elementinhalt1 />
    <Elementinhalt2>
        ...
    </Elementinhaltn>
    ...
</Elementname>
```

Kommentare in einer XML-Datei werden durch `<!--` und `-->` eingeschlossen.

```
<!--
    Dies ist ein Kommentar,
    kein schöner zwar,
    doch ist er da.
-->
```

## A.2.2 Elemente der FLX-Datei

In Tabelle A.1 sind die Elemente der *FLX*-Datei aufgelistet. Bei den Elementnamen sowie den Attributnamen ist die Groß-/Kleinschreibung zu beachten.

Element	Beschreibung
<b>FLX</b>	Root-Element, beinhaltet alle Daten der Platte. Es darf nur ein Root-Element in der Datei geben.
<b>point</b>	Beschreibt einen Punkt in der Ebene
<b>edge</b>	Beschreibt eine Kante
<b>edgeref</b>	Referenz auf eine Kante
<b>region</b>	Plattenbereiche mit konstanter Last und Material
<b>material_iso</b>	Material für isotrope Platten
<b>material_conc</b>	Material für Stahlbetonplatten
<b>material_steel</b>	Material für Stahlplatten mit Membranbeanspruchung
<b>material_fourier</b>	freie Materialdefinition
<b>full_load</b>	konstante Flächenlast auf der gesamten Platte, wenn mehrere Lasten abgegeben werden, werden die Beträge zusammen-addiert

Tabelle A.1: Übersicht über die Elemente einer FLX-Datei

### Element FLX

Attribute:

- ngp** Auswahl der Gauss-Kronrod-Regel für die numerische Integration
  - 1 = 7-15-Regel
  - 2 = 10-21-Regel
  - 3 = 15-31-Regel
  - 4 = 20-41-Regel
  - 5 = 25-51-Regel
  - 6 = 30-61-Regel*optional* der Standardwert 1 bringt i.d.R. die schnellsten Ergebnisse.
- transform** Optimierung der Koordinatentransformation
  - 0 = keine Optimierung
  - 1 = Optimieren des *IP*-Wertes
  - 2 = Optimieren jedes einzelnen Fächers*optional* der Standardwert ist 2.
- nows** "yes" = stets Formparameter *ws* = 1  
*optional* Standard = "no"
- epsilon1** Toleranzgrenze für die numerische Integration  
*optional* Standard:  $10^{-6}$

**epsilon2** Toleranzgrenze für die numerische Optimierung  
*optional* Standard:  $10^{-3}$

**opti** Auswahl des Optimierers:  
 0 = Variable-Metric BFGS Optimierer  
 1 = DONLP2 von Prof.Dr. P. Spellucci, TU Darmstadt (Standard)  
 2 = DONLP2 Blockmode  
 Eingabe einstellig für alle Phasen gleich oder dreistellig für jede Phase getrennt. *optional*

**difftype** Berechnung der Ableitungen:  
 0 = analytische Differentiation (Standard)  
 2 oder 6 = numerische Differentiation mit 2 bzw. 6 zusätzlichen Funktionsaufrufen je Optimierungsparameter  
 Eingabe einstellig für alle Phasen gleich oder dreistellig für jede Phase getrennt. *optional*

**ph3\_fact** Faktor  $>1$  für Begrenzung von unsinnigen Phase 3 Berechnungen  
*optional, Standard 1.25*

**el\_radius** Ersatz-Radius für Einzellasten *optional, Standard  $10^{-3}$*

**random** *optional, für Testzwecke:*  $>0$  Startwert für Zufallsgenerator

**output** 1 = normale Ausgabe (Standard)  
 2 = zusätzliche Ausgabe von Zwischenergebnissen  
 3 = erweiterte Ausgabe von Zwischenergebnissen (hoher Speicherbedarf!)  
 4 = noch mehr Zwischenergebnisse (extrem hoher Speicherbedarf!)  
 Eingabe einstellig für alle Phasen gleich oder dreistellig für jede Phase getrennt. *optional*

#### Elementinhalt:

**point** min. 3 Punkte als Eckpunkte der Platte, Lastangriffspunkte, Punktstützungen usw.  
 Keine 2 Punkte dürfen sich an derselben Position befinden.  
 Es werden nur Punkte berücksichtigt, die von mindestens einem Element **edge** referenziert werden.

**edge** Alle auftretenden Kanten: Lagerungsbedingung der Plattenränder, Linienlasten, Unterzüge usw.  
 Es werden nur Kanten berücksichtigt, die von mindestens einem Element **region** referenziert werden.

**region** Auflistung aller Plattenbereiche.

**material\_iso** Material für isotrope Platten

**material\_conc** Material für Stahlbetonplatten

**material\_steel** Material für Stahlplatten mit Membranbeanspruchung

**material\_fourier** freie Materialdefinition

### Element point

Es werden nur Punkte berücksichtigt, die von mindestens einem Element **edge** oder einem Element **region** referenziert werden.

#### Attribute:

<b>nr</b>	Punktnummer Die Punktnummern müssen in der Datei eindeutig sein.
<b>x</b>	$x$ -Koordinate des Punktes
<b>y</b>	$y$ -Koordinate des Punktes
<b>support</b>	"yes" = Punktstützung "no" = vertikal verschieblich <i>optional</i> Standard = "no"
<b>load</b>	Einzellast <i>optional</i> Standard = 0

#### Elementinhalt:

- leeres Element

### Element edge

Es werden nur Kanten berücksichtigt, die von mindestens einem Element **region** referenziert werden. Jede Kante darf maximal von zwei Elementen **region** referenziert werden.

#### Attribute:

<b>nr</b>	Kantenummer Die Kantenummern müssen in der Datei eindeutig sein.
<b>p1</b>	Punktnummer Anfangspunkt
<b>p2</b>	Punktnummer Endpunkt
<b>support</b>	"yes" = Linienlagerung "no" = vertikal verschieblich <i>optional</i> Standard = "no"
<b>cl</b>	0 oder "no" = gelenkiger Rand 1 oder "yes" = eingespannter Rand $0 < cl < 1$ eingespannter Rand mit abgemindertem plastischen Moment <i>optional</i> Standard = 1 für Kanten zwischen zwei Plattensegmenten ist stets 1 einzugeben.
<b>load</b>	Linienlast <i>optional</i> Standard = 0
<b>mup</b>	positives plastisches Moment des Unterzugs bzw. der Steife <i>optional</i> Standard = 0
<b>mun</b>	negatives plastisches Moment des Unterzugs bzw. der Steife <i>optional</i> Standard = 0
<b>rg</b>	<i>optional</i> für Testzwecke, gibt eine bestimmte Randgruppe vor.

#### Elementinhalt:

- leeres Element

### Element pointref

#### Attribute:

- nr** Punktnummer  
Der Punkt mit der zugehörigen Punktnummer muss im Element **FLX** definiert sein.

#### Elementinhalt:

- leeres Element

### Element edgeref

#### Attribute:

- nr** Kantenummer  
Die Kante mit der zugehörigen Kantenummer muss im Element **FLX** definiert sein.

#### Elementinhalt:

- leeres Element

### Element polygon

Zusammenfassung mehrerer Kanten zu einem Polygon

#### Attribute:

- positive** yes = normales (positives), umschließendes Polygon  
no = negatives Polygon (Aussparung)  
*optional* Standard = yes

#### Elementinhalt:

- edgeref** Referenzen auf die umrandenden Kanten. Die Kanten müssen ein geschlossenes, einfaches, nicht überschlagenes Polygon ergeben.

### Element region

Die Plattenbereiche werden aus den in **edgeref** angegebenen Kanten gebildet. Die Plattenbereiche dürfen sich nicht überschneiden. Es sind maximal 32 Plattenbereiche zulässig.

**Achtung!** Bei mehr als 8 Plattenbereichen steigt der Rechenaufwand jedoch enorm an!

#### Attribute:

- nr** Nummer der Region  
Die Nummern muss in der Datei eindeutig sein.  
**material** Nummer des Materials des Plattenbereichs  
**load** Betrag der Flächenlast *optional* Standard = 0

#### Elementinhalt:

- polygon** Rand-Polygone der Region, es muss genau ein positives Polygon enthalten sein, das die Aussenkontur beschreibt. Es können mehrere Aussparungen definiert werden, die Komplette innerhalb der Aussenkontur liegen müssen, und sich nicht gegenseitig überschneiden dürfen.

**pointref** Punkte im Inneren des Plattenbereichs mit Einzellast oder Punktstützung

### **Element material\_iso**

#### Attribute:

**nr** Nummer des Materials  
Die Materialnummern müssen in der Datei eindeutig sein.

**mup** positives plastisches Moment der isotropen Platte

**mun** negatives plastisches Moment der isotropen Platte

**ayx** Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

**ayy** Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

#### Elementinhalt:

- leeres Element

### **Element material\_conc**

#### Attribute:

**nr** Nummer des Materials  
Die Materialnummern müssen in der Datei eindeutig sein.

**muxp** positives plastisches Moment der orthotropen Platte in  $x$ -Richtung

**munx** negatives plastisches Moment der orthotropen Platte in  $x$ -Richtung

**muyp** positives plastisches Moment der orthotropen Platte in  $y$ -Richtung

**muyn** negatives plastisches Moment der orthotropen Platte in  $y$ -Richtung

**ayx** Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

**ayy** Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

#### Elementinhalt:

- leeres Element

### **Element material\_steel**

#### Attribute:

**nr** Nummer des Materials  
Die Materialnummern müssen in der Datei eindeutig sein.

**sigmaf** Fließspannung

**d** Plattendicke

**nx** Membrankraft in  $x$ -Richtung

**ny** Membrankraft in  $y$ -Richtung

**nxy** Membrankraft in  $xy$ -Richtung

**ayx** Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

ayy Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

Elementinhalt:

- leeres Element

**Element material\_fourier**

Attribute:

nr Nummer des Materials  
Die Materialnummern müssen in der Datei eindeutig sein.

cp Fourier-Koeffizient  $c$  für positive Fließlinien

a2p Fourier-Koeffizient  $a_2$  für positive Fließlinien *optional*

a4p Fourier-Koeffizient  $a_4$  für positive Fließlinien *optional*

a6p Fourier-Koeffizient  $a_6$  für positive Fließlinien *optional*

b2p Fourier-Koeffizient  $b_2$  für positive Fließlinien *optional*

b4p Fourier-Koeffizient  $b_4$  für positive Fließlinien *optional*

b6p Fourier-Koeffizient  $b_6$  für positive Fließlinien *optional*

cn Fourier-Koeffizient  $c$  für negative Fließlinien

a2n Fourier-Koeffizient  $a_2$  für negative Fließlinien *optional*

a4n Fourier-Koeffizient  $a_4$  für negative Fließlinien *optional*

a6n Fourier-Koeffizient  $a_6$  für negative Fließlinien *optional*

b2n Fourier-Koeffizient  $b_2$  für negative Fließlinien *optional*

b4n Fourier-Koeffizient  $b_4$  für negative Fließlinien *optional*

b6n Fourier-Koeffizient  $b_6$  für negative Fließlinien *optional*

ayx Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

ayy Transformationsmatrix vorgeben  
*optional, für Testzwecke*

Hinweis: Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass  $m_u^+$  stets positiv und  $m_u^-$  stets negativ ist. Im Programm wird dies nicht überprüft. Nicht eingegebene Koeffizienten werden zu Null angenommen.

Elementinhalt:

- leeres Element

### A.2.3 Eingabedateien zu den Beispielen

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="1" difftype="0">
<!-- Quadratplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="1" y="1"/>
<point nr="2" x="1" y="0"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>
<point nr="4" x="0" y="1"/>

<edge nr="1" p1="2" p2="1" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="1" p2="4" cl="0" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 1, Variante 1



```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="1" difftype="0">
<!-- Quadratplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="1" y="1"/>
<point nr="2" x="1" y="0"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>
<point nr="4" x="0" y="1"/>

<edge nr="1" p1="2" p2="1" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="1" p2="4" cl="1" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 1, Variante 2

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="1" difftype="0">
<!-- Quadratplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="0"/>

<point nr="1" x="1" y="1"/>
<point nr="2" x="1" y="0"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>
<point nr="4" x="0" y="1"/>

<edge nr="1" p1="2" p2="1" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="1" p2="4" cl="0" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 1, Variante 3

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="2" opti="1" difftype="0">
<!-- Rechteckplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_conc nr="2" muxp="2.19" muxn="13.17"
               muyp="9.22" muyn="19.20"/>

<point nr="1" x="9.6" y="4.8"/>
<point nr="2" x="9.6" y="0"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>
<point nr="4" x="0" y="4.8"/>

<edge nr="1" linear="yes" p1="2" p2="1" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="2" linear="yes" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" linear="yes" p1="3" p2="4" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="4" linear="yes" p1="1" p2="4" cl="1" support="yes"/>

<region nr="1" material="2" load="10">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm *FLX* zum Beispiel 2

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="0" difftype="0">
<!-- Dreiecksplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="1" y="1"/>
<point nr="2" x="-1" y="1"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="no"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="1" cl="1" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm *FLX* zum Beispiel 3, Variante 1

```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="0" transform="0" opti="0" difftype="0">
<!-- Dreiecksplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="1" y="1"/>
<point nr="2" x="-1" y="1"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="no" mup="1" mun="1"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="1" cl="1" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgerref nr="1"/>
    <edgerref nr="2"/>
    <edgerref nr="3"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm *FLX* zum Beispiel 3, Variante 2

```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="0" difftype="0">
<!-- Dreiecksplatte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="2" y="1"/>
<point nr="2" x="-1" y="1"/>
<point nr="3" x="0" y="0"/>

<edge nr="1" linear="yes" p1="1" p2="2" cl="0" support="no"/>
<edge nr="2" linear="yes" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" linear="yes" p1="3" p2="1" cl="1" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgerref nr="1"/>
    <edgerref nr="2"/>
    <edgerref nr="3"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm *FLX* zum Beispiel 3, Variante 3

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" el_radius="0" transform="0" opti="1" difftype="0">
<!-- Rechteckplatte mit Einzellast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="-5" y="0"/>
<point nr="2" x="-5" y="3"/>
<point nr="3" x="5" y="3"/>
<point nr="4" x="5" y="0"/>
<point nr="5" x="0" y="2" load="1"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="4" p2="1" cl="0" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="0">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 4

```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="0" transform="0" opti="1" difftype="0">
<!-- Stützenflansch nach EC3 -->

<material_steel nr="1" d="1.4" sigmaf="35.5"
               nx="8.7" ny="0" nxy="0"/>

<point nr="1" x="-50" y="0"/>
<point nr="2" x="-50" y="14.5"/>
<point nr="3" x="50" y="14.5"/>
<point nr="4" x="50" y="0"/>
<point nr="5" x="5" y="7" load="181.2"/>
<point nr="6" x="-5" y="7" load="181.2"/>

<edge nr="1" linear="yes" p1="1" p2="2" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="2" linear="yes" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" linear="yes" p1="3" p2="4" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="4" linear="yes" p1="4" p2="1" cl="0" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="0">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 5

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="0" transform="0" opti="1" difftype="0">
<!-- Stützenflansch nach EC3 -->

<material_steel nr="1" d="1.4" sigmaf="35.5"
               nx="8.7" ny="0" nxy="0"/>

<point nr="1" x="0" y="0"/>
<point nr="2" x="0" y="14.5"/>
<point nr="3" x="50" y="14.5"/>
<point nr="4" x="50" y="0"/>
<point nr="5" x="5" y="7" load="181.2"/>

<edge nr="1" linear="yes" p1="1" p2="2" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="2" linear="yes" p1="2" p2="3" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="3" linear="yes" p1="3" p2="4" cl="1" support="yes"/>
<edge nr="4" linear="yes" p1="4" p2="1" cl="0" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="0">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm *FLX* zum Beispiel 5 mit zusätzlicher Rippe

```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="0" difftype="0">
<!-- punktgestützte Platte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="1" y="1" support="yes"/>
<point nr="2" x="1" y="0" support="yes"/>
<point nr="3" x="0" y="0" support="yes"/>
<point nr="4" x="0" y="1" support="yes"/>

<edge nr="1" p1="2" p2="1" cl="1" support="no"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="1" support="no"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="1" support="no"/>
<edge nr="4" p1="1" p2="4" cl="1" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgerref nr="1"/>
    <edgerref nr="2"/>
    <edgerref nr="3"/>
    <edgerref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 6, Variante 1

```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="0" difftype="0">
<!-- punktgestützte Platte mit konstanter Flächenlast -->

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="1.5" y="1" support="yes"/>
<point nr="2" x="1.5" y="0" support="yes"/>
<point nr="3" x="0" y="0" support="yes"/>
<point nr="4" x="0" y="1" support="yes"/>

<edge nr="1" p1="2" p2="1" cl="1" support="no"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="1" support="no"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="1" support="no"/>
<edge nr="4" p1="1" p2="4" cl="1" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="1">
  <polygon>
    <edgerref nr="1"/>
    <edgerref nr="2"/>
    <edgerref nr="3"/>
    <edgerref nr="4"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 6, Variante 2

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="1" difftype="0">

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="0.0" y="0.6"/>
<point nr="2" x="0.0" y="1.2"/>
<point nr="3" x="2.5" y="1.2"/>
<point nr="4" x="2.5" y="0.0"/>
<point nr="5" x="1.25" y="0.0"/>
<point nr="6" x="1.25" y="0.6"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="4" p2="5" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="5" p1="5" p2="6" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="6" p1="6" p2="1" cl="0" support="yes"/>

<region nr="1" material="1" load="10">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
    <edgeref nr="5"/>
    <edgeref nr="6"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 7, Variante 1



```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="1" difftype="0">

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="0.0" y="0.6"/>
<point nr="2" x="0.0" y="1.2"/>
<point nr="3" x="2.5" y="1.2"/>
<point nr="4" x="2.5" y="0.0"/>
<point nr="5" x="1.25" y="0.0"/>
<point nr="6" x="1.25" y="0.6"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="no"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="4" p2="5" cl="0" support="no"/>
<edge nr="5" p1="5" p2="6" cl="0" support="no"/>
<edge nr="6" p1="6" p2="1" cl="0" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="10">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
    <edgeref nr="5"/>
    <edgeref nr="6"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 7, Variante 2

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="0" difftype="0">

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="0.0" y="0.6"/>
<point nr="2" x="0.0" y="1.2"/>
<point nr="3" x="2.5" y="1.2"/>
<point nr="4" x="2.5" y="0.0"/>
<point nr="5" x="1.25" y="0.0"/>
<point nr="6" x="1.25" y="0.6"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="4" p2="5" cl="0" support="no"/>
<edge nr="5" p1="5" p2="6" cl="0" support="no"/>
<edge nr="6" p1="6" p2="1" cl="0" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="10">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
    <edgeref nr="5"/>
    <edgeref nr="6"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>
```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 7, Variante 3

```

<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1"?>
<FLX output="1" transform="0" opti="1" difftype="0">

<material_iso nr="1" mup="1" mun="1"/>

<point nr="1" x="0.0" y="0.6"/>
<point nr="2" x="0.0" y="1.2"/>
<point nr="3" x="2.5" y="1.2"/>
<point nr="4" x="2.5" y="0.0"/>
<point nr="5" x="1.25" y="0.0"/>
<point nr="6" x="1.25" y="0.6" support="yes"/>

<edge nr="1" p1="1" p2="2" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="2" p1="2" p2="3" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="3" p1="3" p2="4" cl="0" support="yes"/>
<edge nr="4" p1="4" p2="5" cl="0" support="no"/>
<edge nr="5" p1="5" p2="6" cl="0" support="no"/>
<edge nr="6" p1="6" p2="1" cl="0" support="no"/>

<region nr="1" material="1" load="10">
  <polygon>
    <edgeref nr="1"/>
    <edgeref nr="2"/>
    <edgeref nr="3"/>
    <edgeref nr="4"/>
    <edgeref nr="5"/>
    <edgeref nr="6"/>
  </polygon>
</region>
</FLX>

```

Eingabedatei für das Programm  $\mathcal{FLX}$  zum Beispiel 7, Variante 4



## Anhang B

# Dokumentation zum Quelltext des Programms *FLX*

### B.1 Klassenübersicht

Tabelle B.1 enthält eine Auflistung aller im Programm *FLX* enthaltenen Klassen. Die Klassen gliedern sich in zwei Arten von Objekten. Die Berechnungs-Objekte, die für die Fließlinienberechnung zuständig sind, sind in ANSI-C++ geschrieben, und können somit unter beliebigen Entwicklungsumgebungen und unter beliebigen Betriebssystemen benutzt werden. Die für die Ein- und Ausgabe, für Dateioperationen sowie für das Hauptprogramm zuständigen Klassen nutzen Microsoft-spezifische Erweiterungen und sind nur im Microsoft-C++ unter Windows verwendbar.

Klassenname	Basisklasse	Beschreibung
<b>Berechnungsobjekte in ANSI-C++</b>		
CPlatte	-	Grundobjekt der Plattenberechnung
CRegion	-	Plattenbereich
CSolutionData	-	Objekt enthält alle Daten zur Beschreibung der Geometrie des Fließlinienmusters
CPlattenSegment	-	Segment eines Fließlinienmusters der Platte, abstrakte Basisklasse
CPSEben	CPlattenSegment	Ebenes Plattensegment
CPSFaecher	CPlattenSegment	Fächersegment
C3DVektor	-	räumlicher Vektor
CPunkt	-	Punkt der Ebene
CVektor	-	Klasse für Vektoralgebra
CEckPunkt	CPunkt	Platteneckpunkt
CKontrollPunkt	CPunkt	Kontrollpunkt
CLinie	-	Gerade Linie oder Bézier-Spline
CKante	CLinie	Kante zwischen zwei Plattensegmenten oder am Plattenrand
CRand	CLinie	Plattenrand
CKantenPolygon	-	Polygon aus Fließlinien

Klassenname	Basisklasse	Beschreibung
CRandPolygon	-	Polygon aus Plattenrändern
CPolyKante	-	Kante in einem CKantenPolygon oder einem CRandPolygon
CBezier	-	Funktionen zur Berechnung der Bézier-Splines, enthält auch die Stützstellen für die Gauss-Integration
CMat	-	Material, abstrakte Basisklasse
CMatIso	CMat	Material für isotrope Platten
CMatStb	CMat	Material für Stahlbetonplatten
CMatStahl	CMat	Material für Stahlplatten mit Membranbeanspruchung
CSolutionRegion	-	Basisklasse für eine Fließlinienberechnung
CPhase1_Region	CSolutionRegion	Berechnung einer Plattenregion in Phase 1
CPhase2_Region	CSolutionRegion	Berechnung einer Plattenregion in Phase 2
CPhase3_Region	CSolutionRegion	Berechnung einer Plattenregion in Phase 3
COptimierer	-	Basisklasse für numerische Optimierer
DONLP2	COptimierer	numerischer Optimierer DONLP2
CVariableMetric	COptimierer	numerischer Optimierer Variable Metric
<b>Microsoft-spezifische MFC-Objekte</b>		
CFLXApp	CWinApp	Applikations-Objekt, kontrolliert die Programmausführung
CMainFrame	CFrameWnd	Hauptfenster-Objekt
CTextView	CEditView	Objekt für die Anzeige der Textausgabe
C2DView	CView	Objekt für die zweidimensionale Grafikausgabe
C3DView	CView	Objekt für die dreidimensionale OpenGL-Anzeige
CAiView	CView	Objekt für die Anzeige der Integrationsstützstellen eines Fächers
CFLXDoc	CFLXDoc	Dokument-Objekt, regelt die Kommunikation zwischen Rechen teil und Benutzeroberfläche
CAboutDlg	CDialog	Programminfo-Dialog
CInfoDialog	CDialog	Info-Dialog während der Rechnung
CSplashWnd	CWnd	Begrüßungsbildschirm
<b>Fremde Klassen</b>		
DONLP2	-	Numerischer Optimierer © Prof. Dr. P. Spellucci
CMarkup	-	Klasse zum Einlesen von XML-Dateien

Klassenname	Basisklasse	Beschreibung
		© <i>First Objective Software</i>
CXInfoTip	-	Klasse zum Anzeigen von Tooltips © <i>Mark Bozeman</i>

Tabelle B.1: Übersicht über die Klassen im Programm *FLX*





# Anhang C

## Gauss-Kronrod – Stützstellen und Gewichte

In den folgenden Tabellen sind die Gewichte für die Gauss-Kronrod-Integration über das Intervall  $[-1, 1]$  aufgelistet. (Quelle: Piessens et al., [13]) Die kleingedruckten Stellen übersteigen die Rechner-Genauigkeit von 8-Byte Real-Werten.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n w g_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} w k_i f(x_i) \quad (\text{C.1})$$

Die Gauss-Integration mit  $n$  Stützstellen integriert Polynome bis zum Grad  $2n - 1$  exakt, die Kronrod-Regel mit  $2n + 1$  Stützstellen ist exakt für Polynome bis zum Grad  $3n + 1$ .

Stützstelle +/-	Gauss-Gewicht	Kronrod-Gewicht
0.991455371120812639206854697526329	–	0.022935322010529224963732008058970
0.949107912342758524526189684047851	0.129484966168869693270611432679082	0.063092092629978553290700663189204
0.864864423359769072789712788640926	–	0.104790010322250183839876322541518
0.741531185599394439863864773280788	0.279705391489276667901467771423780	0.140653259715525918745189590510238
0.586087235467691130294144838258730	–	0.169004726639267902826583426598550
0.405845151377397166906606412076961	0.381830050505118944950369775488975	0.190350578064785409913256402421014
0.207784955007898467600689403773245	–	0.204432940075298892414161999234649
0.0000000000000000000000000000000	0.417959183673469387755102040816327	0.209482141084727828012999174891714

Tabelle C.1: Gauss-Kronrod-7-15-Regel

Stützstelle +/-	Gauss-Gewicht	Kronrod-Gewicht
0.995657163025808080735527280689003	–	0.011694638867371874278064396062192
0.973906528517171720077964012084452	0.066671344308688137593568809893332	0.032558162307964727478818972459390
0.930157491355708226001207180059508	–	0.054755896574351996031381300244580
0.865063366688984510732096688423493	0.149451349150580593145776339657697	0.075039674810919952767043140916190
0.780817726586416897063717578345042	–	0.093125454583697605535065465083366
0.679409568299024406234327365114874	0.219086362515982043995534934228163	0.109387158802297641899210590325805
0.562757134668604683339000099272694	–	0.123491976262065851077958109831074
0.433395394129247190799265943165784	0.269266719309996355091226921569469	0.134709217311473325928054001771707
0.294392862701460198131126603103866	–	0.142775938577060080797094273138717
0.148874338981631210884826001129720	0.295524224714752870173892994651338	0.147739104901338491374841515972068
0.0000000000000000000000000000000	–	0.149445554002916905664936468389821

Tabelle C.2: Gauss-Kronrod-10-21-Regel

Stützstelle +/-	Gauss-Gewicht	Kronrod-Gewicht
0.998002298693397060285172840152271	—	0.005377479872923348987792051430128
0.987992518020485428489565718586613	0.030753241996117268354628393577204	0.015007947329316122538374763075807
0.967739075679139134257347978784337	—	0.025460847326715320186874001019653
0.937273392400705904307758947710209	0.070366047488108124709267416450667	0.035346360791375846222037948478360
0.897264532344081900882509656454496	—	0.044589751324764876608227299373280
0.848206583410427216200648320774217	0.107159220467171935011869546685869	0.053481524690928087265343147239430
0.790418501442465932967649294817947	—	0.062009567800670640285139230960803
0.724417731360170047416186054613938	0.139570677926154314447804794511028	0.069854121318728258709520077099147
0.650996741297416970533735895313275	—	0.076849680757720378894432777482659
0.570972172608538847537226737253911	0.166269205816993933553200860481209	0.083080502823133021038289247286104
0.485081863640239680693655740232351	—	0.088564443056211770647275443693774
0.394151347077563369897207370981045	0.186161000015562211026800561866423	0.093126598170825321225486872747346
0.299180007153168812166780024266389	—	0.096642726983623678505179907627589
0.201194093997434522300628303394596	0.198431485327111576456118326443839	0.099173598721791959332393173484603
0.101142066918717499027074231447392	—	0.100769845523875595044946662617570
0.0000000000000000000000000000000	0.202578241925561272880620199967519	0.101330007014791549017374792767493

Tabelle C.3: Gauss-Kronrod-15-31-Regel

Stützstelle +/-	Gauss-Gewicht	Kronrod-Gewicht
0.998859031588277663838315576545863	—	0.003073583718520531501218293246031
0.993128599185094924786122388471320	0.017614007139152118311861962351853	0.008600269855642942198661787950102
0.981507877450250259193342994720217	—	0.014626169256971252983787960308868
0.963971927277913791267666131197277	0.040601429800386941331039952274932	0.020388373461266523598010231432755
0.940822633831754753519982722212443	—	0.025882133604951158834505067096153
0.912234428251325905867752441203298	0.062672048334109063569506535187042	0.031287306777032798958543119323801
0.878276811252281976077442995113078	—	0.036600169758200798030557240707211
0.839116971822218823394529061701521	0.083276741576704748724758143222046	0.041668873327973686263788305936895
0.795041428837551198350638833272788	—	0.046434821867497674720231880926108
0.746331906460150792614305070355642	0.101930119817240435036750135480350	0.050944573923728691932707670050345
0.693237656334751384805490711845932	—	0.055195105348285994744832372419777
0.636053680726515025452836696226286	0.11819453196151841731237737711382	0.059111400880639572374967220648594
0.575140446819710315342946036586425	—	0.062653237554781168025870122174255
0.510867001950827098004364050955251	0.131688638449176626898494499748163	0.065834597133618422111563556969398
0.443593175238725103199992213492640	—	0.068648672928521619345623411885368
0.373706088715419560672548177024927	0.142096109318382051329298325067165	0.071054423553444068305790361723210
0.301627868114913004320555356858592	—	0.07303069033278667495189417658913
0.227785851141645078080496195368575	0.149172986472603746787828737001969	0.074582875400499188986581418362488
0.152605465240922675505220241022678	—	0.075704497684556674659542775376617
0.076526521133497333754640409398838	0.152753387130725850698084331955098	0.076377867672080736705502835038061
0.0000000000000000000000000000000	—	0.076600711917999656445049901530102

Tabelle C.4: Gauss-Kronrod-20-41-Regel

---

Stützstelle +/-	Gauss-Gewicht	Kronrod-Gewicht
0.999262104992609834193457486540341	—	0.001987383892330315926507851882843
0.995556969790498097908784946893902	0.011393798501026287947902964113235	0.005561932135356713758040236901066
0.988035794534077247637331014577406	—	0.009473973386174151607207710523655
0.976663921459517511498315386479594	0.026354986615032137261901815295299	0.013236229195571674813656405846976
0.961614986425842512418130033660167	—	0.016847817709128298231516667536336
0.942974571228974339414011169658471	0.040939156701306312655623487711646	0.020435371145882835456568292235939
0.920747115281701561746346084546331	—	0.024009945606953216220092489164881
0.894991997878275368851042006782805	0.054904695975835191925936891540473	0.027475317587851737802948455517811
0.865847065293275595448996969588340	—	0.030792300167387488891109020215229
0.833442628760834001421021108693570	0.068038333812356917207187185656708	0.034002130274329337836748795229551
0.797873797998500059410410904994307	—	0.037116271483415543560330625367620
0.759259263037357630577282865204361	0.080140700335001018013234959669111	0.040083825504032382074839284467076
0.717766406813084388186654079773298	—	0.042872845020170049476895792439495
0.673566368473468364485120633247622	0.091028261982963649811497220702892	0.045502913049921788909870584752660
0.626810099010317412788122681624518	—	0.047982537138836713906392255756915
0.577662930241222967723689841612654	0.100535949067050644202206890392686	0.050277679080715671963325259433440
0.526325284334719182599623778158010	—	0.052362885806407475864366712137873
0.473002731445714960522182115009192	0.108519624474263653116093957050117	0.054251129888545490144543370459876
0.417885382193037748851814394594572	—	0.055950811220412317308240686382747
0.361172305809387837735821730127641	0.114858259145711648339325545869556	0.057437116361567832853582693939506
0.303089538931107830167478909980339	—	0.058689680022394207961974175856788
0.243866883720988432045190362797452	0.119455763535784772228178126512901	0.059720340324174059979099291932562
0.183718939421048892015969888759528	—	0.060539455376045862945360267517565
0.122864692610710396387359818808037	0.122242442990310041688959518945852	0.061128509717053048305859030416293
0.061544483005685078886546392366797	—	0.061471189871425316661544131965264
0.0000000000000000000000000000000	0.123176053726715451203902873079050	0.061580818067832935078759824240055

Tabelle C.5: Gauss-Kronrod-25-51-Regel

Stützstelle +/-	Gauss-Gewicht	Kronrod-Gewicht
0.999484410050490637571325895705811	—	0.001389013698677007624551591226760
0.996893484074649540271630050918695	0.007968192496166605615465883474674	0.003890461127099884051267201844516
0.991630996870404594858628366109486	—	0.006630703915931292173319826369750
0.983668123279747209970032581605663	0.018466468311090959142302131912047	0.009273279659517763428441146892024
0.973116322501126268374693868423707	—	0.011823015253496341742232898853251
0.960021864968307512216871025581798	0.028784707883323369349719179611292	0.014369729507045804812451432443580
0.944374444748559979415831324037439	—	0.016920889189053272627572289420322
0.926200047429274325879324277080474	0.038799192569627049596801936446348	0.019414141193942381173408951050128
0.905573307699907798546522558925958	—	0.021828035821609192297167485738339
0.882560535792052681543116462530226	0.048402672830594052902938140422808	0.024191162078080601365686370725232
0.857205233546061098958658510658944	—	0.026509954882333101610601709335075
0.829565762382768397442898119732502	0.057493156217619066481721689402056	0.028754048765041292843978785354334
0.799727835821839083013668942322683	—	0.030907257562387762472884252943092
0.767777432104826194917977340974503	0.065974229882180495128128515115962	0.032981447057483726031814191016854
0.733790062453226804726171131369528	—	0.034979338028060024137499670731468
0.697850494793315796932292388026640	0.073755974737705206268243850022191	0.036882364651821229223911065617136
0.660061064126626961370053668149271	—	0.038678945624727592950348651532281
0.620526182989242861140477556431189	0.080755895229420215354694938460530	0.040374538951535959111995279752468
0.579345235826361691756024932172540	—	0.041969810215164246147147541285970
0.536624148142019899264169793311073	0.086899787201082979802387530715126	0.043452539701356069316831728117073
0.492480467861778574993693061207709	—	0.044814800133162663192355551616723
0.447033769538089176780609900322854	0.092122522237786128717632707087619	0.046059238271006988116271735559374
0.400401254830394392535476211542661	—	0.047185546569299153945261478181099
0.352704725530878113471037207089374	0.096368737174644259639468626351810	0.048185861757087129140779492298305
0.304073202273625077372677107199257	—	0.049055434555029778887528165367238
0.254636926167889846439805129817805	0.099593420586795267062780282103569	0.049795683427074206357811569379942
0.204525116682309891438957671002025	—	0.050405921402782346840893085653585
0.153869913608583546963794672743256	0.101762389748405504596428952168554	0.050881795898749606492297473049805
0.102806937966737030147096751318001	—	0.051221547849258772170656282604944
0.051471842555317695833025213166723	0.102852652893558840341285636705415	0.051426128537459025933862879215781
0.0000000000000000000000000000000	—	0.051494729429451567558340433647099

Tabelle C.6: Gauss-Kronrod-30-61-Regel

# Literaturverzeichnis

- [1] ABBAS, H. ; ISLAM, N. ; JAIN, P. C.: A Computer-oriented Procedure for the Yield Line Analysis of Slabs. In: *Computers and Structures* 52 (1994), Nr. 3, S. 419–430
- [2] AVELLAN, K. ; WERKLE, H.: Zur Anwendung der Bruchlinientheorie in der Praxis. In: *Bautechnik* 75 (1998), Nr. 2, S. 80–93
- [3] BAKER, G. ; RASMUSSEN, L. J.: A Finite Element Yield Line Model for the Analysis of Reinforced Concrete Plates. In: *Structural Engineering and Mechanics* 6 (1998), Nr. 4, S. 395–409
- [4] BALASUBRAMANYAM, K. V. ; KALYANARAMAN, V.: Yield-Line Analysis by Linear Programming. In: *Journal of Structural Engineering* 114 (1988), Nr. 6, S. 1431–1437
- [5] BAUER, D. ; REDWOOD, R. G.: Numerical Yield Line Analysis. In: *Computers and Structures* 26 (1986), Nr. 4, S. 587–596
- [6] BAUMANN, R. A. ; WEISGERBER, F. E.: Yield-Line Analysis of Slabs-on-Grade. In: *Journal of Structural Engineering* 109 (1983), Nr. 7, S. 1553–1568
- [7] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 4. Aufl. Frankfurt am Main : Harri Deutsch, 1999
- [8] COOKSON, P. J.: Generalized Yield Lines in Reinforced Concrete Slabs. In: *Journal of Structural Mechanics* 7 (1979), Nr. 1, S. 65–82
- [9] DAVIES, P. ; KEMP, K. O. ; WALKER, A. C.: Analysis of Failure Mechanism of an Axially Loaded Simply Supported Steel Plate. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2 – Research and Theory* 59 (1975), Nr. 4, S. 645–658
- [10] DAVIS, P. J. ; RABINOWITZ, P.: *Methods of Numerical Integration*. 2. Aufl. San Diego : Academic Press, Inc., 1983
- [11] DENTON, S. R.: Compatibility Requirements for Yield-Line Mechanisms. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 18, S. 3099–3109
- [12] DICKENS, J. G. ; JONES, L. L.: A General Computer Program for the Yield-Line Solution of Edge Supported Slabs. In: *Computers and Structures* 30 (1988), Nr. 3, S. 465–476

- [13] DONCKER-KAPENGA, E. de ; KAHANER, D. K. ; PIESSENS, R. ; ÜBERHUBER, C. W.: *Quadpack - A Subroutine Package for Automatic Integration*. Berlin : Springer, 1983
- [14] DUDDECK, H. (Hrsg.): *Seminar Traglastverfahren*. 2. Aufl. Braunschweig : Institut für Statik der TU Braunschweig, 1973
- [15] FARIN, G.: *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design*. Braunschweig : Vieweg, 1994
- [16] FARIN, G. ; HOSCHEK, J. ; KIM, M.-S.: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam : Elsevier, 2002
- [17] FLANNERY, B. P. ; PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T.: *Numerical Recipes in Fortran*. 2. Aufl. Cambridge : Cambridge University Press, 1992
- [18] FOX, E. N.: Limit Analysis for Plates - Simple Loading Problem Involving a Complex Exact Solution. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A-Mathematical And Physical Science* 272 (1972), Nr. 1228, S. 463–492
- [19] FOX, E. N.: Limit Analysis for Plates - Exact Solution for a Clamped Square Plate of Isotropic Homogeneous Material Obeying Square Yield Criterion and Loaded by Uniform Pressure. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A-Mathematical And Physical Science* 277 (1974), Nr. 1265, S. 121–155
- [20] GAMBLE, W. L. ; PARK, R.: *Reinforced Concrete Slabs*. 2. Aufl. New York : John Wiley & Sons, Inc., 2000
- [21] GAUGNER, H.-U.: *Untersuchung der Tragfähigkeit Hoher Unversteifter I-Träger Kurzer Spannweite mit einer Konzentrierten Last auf dem Obergurt*. Stuttgart, Institut für Stahlbau und Holzbau der Universität Stuttgart, Dissertation, 1987
- [22] GOHNERT, M.: Collapse Load Analysis of Yield-Line Elements. In: *Engineering Structures* 22 (2000), Nr. 8, S. 1048–1054
- [23] GOHNERT, M. ; KEMP, A. R.: Yield-Line Elements: For Elastic Bending of Plates and Slabs. In: *Engineering Structures* 17 (1995), Nr. 2, S. 87–94
- [24] HANCOCK, G. J. ; ZHAO, X.-L.: A Theoretical Analysis of the Plastic-Moment Capacity of an Inclined Yield Line Under Axial Force. In: *Thin-Walled Structures* 15 (1993), Nr. 3, S. 185–207

- [25] HANCOCK, G. J. ; ZHAO, X.-L.: Experimental Verification of the Theory of Plastic-moment Capacity of an Inclined Yield Line under Axial Force. In: *Thin-Walled Structures* 15 (1993), Nr. 3, S. 209–233
- [26] HANCOCK, G. J. ; ZHAO, X.-L.: Square and Rectangular Hollow Sections under Transverse End-bearing Force. In: *Journal of Structural Engineering* 121 (1995), Nr. 9, S. 1323–1329
- [27] HODGE, P. G. J. ; SAWCZUK, A.: Limit Analysis and Yield-Line Theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), Nr. 2, S. 357 – 362
- [28] JAEGER, T. ; SAWCZUK, A.: *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*. Berlin : Springer, 1963
- [29] JENNINGS, A.: On the Identification of Yield-Line Collapse Mechanisms. In: *Engineering Structures* 18 (1996), Nr. 4, S. 332–337
- [30] JENNINGS, A. ; MCKEOWN, J. J. ; SLOAN, D. ; THAVALINGAM, A.: A Computerised Method for Rigid-plastic Yield-line Analysis. In: *Computers and Structures* 68 (1998), Nr. 6, S. 601–612
- [31] JENNINGS, A. ; MCKEOWN, J. J. ; SLOAN, D. ; THAVALINGAM, A.: Computer-Assisted Generation of Yield-Line Patterns for Uniformly Loaded Isotropic Slabs Using an Optimisation Strategy. In: *Engineering Structures* 21 (1999), Nr. 3, S. 488–496
- [32] JOHANSEN, K. W.: *Yield-Line Theory*. London : Cement and Concrete Association, 1962
- [33] JOHANSEN, K. W.: *Yield-Line Formulae for Slabs*. London : Cement and Concrete Association, 1972
- [34] JOHNARRY, T.: Simpler Nodal Forces for Yield-Line Analysis of Reinforced Concrete Slabs. In: *Magazine of Concrete Research* 36 (1984), Nr. 127, S. 92–98
- [35] JOHNARRY, T.: Simpler Nodal Forces for Yield-Line Analysis of Reinforced Concrete Slabs (Reply). In: *Magazine of Concrete Research* 37 (1985), Nr. 131, S. 114–118
- [36] JOHNARRY, T.: Support Reaction and its Implication for Orthotropy in the Yield-Line Method. In: *Magazine of Concrete Research* 44 (1992), Nr. 161, S. 249–254
- [37] JOHNSON, D.: Yield-Line Analysis by Sequential Linear-Programming. In: *International Journal of Solids and Structures* 32 (1995), Nr. 10, S. 1395–1404

- [38] JOHNSON, D. ; RAMSAY, A. C. A.: Geometric Optimization of Yield-Line Patterns Using a Direct Search Method. In: *Structural Optimization* 14 (1997), Nr. 2, S. 108–115
- [39] JOHNSON, D. ; RAMSAY, A. C. A.: Analysis of Prctical Slab Configurations Using Automated Yield-line Analysis and Geometric Optimization of Fracture Patterns. In: *Engineering Structures* 20 (1998), Nr. 8, S. 647–654
- [40] JONES, L. L. ; WOOD, R. H.: *Yield-Line Analysis of Slabs*. London : Thames & Hudson, 1967
- [41] KOWAL, Z. ; SAWCZUK, A.: On the Yield-Line Theory of Plates with Random Plastic Moments. In: *Engineering Fracture Mechanics* 8 (1976), Nr. 1, S. 275–280
- [42] LEONHARDT, F.: *Vorlesungen über Massivbau*. Bd. 4. 2. Aufl. Berlin : Springer, 1978
- [43] LEONHARDT, F.: *Vorlesungen über Massivbau*. Bd. 1. 3. Aufl. Berlin : Springer, 1984
- [44] LIU, T. C.: Automatic Computational Method for Yield Line Analysis. In: *Structural Engineering and Mechanics* 8 (1999), Nr. 3, S. 311–324
- [45] PARDEY, A.: *Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten im Vergleich zur Bruchlinientheorie*. Berlin : Beuth, 1994
- [46] RIDDER, L. de ; DOOREN, P. van: An Adaptive Algorithm for Numerical Integration over an N-Dimensional Cube. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2 (1976), Nr. 3, S. 207–217
- [47] ROBERTS, T. M. ; ROCKEY, K. C.: Mechanism Solution for Predicting the Collapse Loads of Slender Plate Girders when Subjected to In-plane Patch Loading. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2 – Research and Theory* 67 (1979), Nr. 1, S. 155–175
- [48] SAWCZUK, A. ; SOKÓL-SUPEL, J.: *Limit Analysis of Plates*. Warschau : Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993
- [49] SPELLUCCI, P.: *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Basel : Birkhäuser, 1993
- [50] SPELLUCCI, P.: An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems. In: *Mathematical Programming: Series A and B* 82 (1998), Nr. 3, S. 413–448



- [51] WEISSTEIN, E.: *Eric Weisstein's World of Mathematics*.  
<http://mathworld.wolfram.com>, 2001
- [52] ZAGOTTIS, D. L. d.: Yield-Line Theory – General Energy Formulation. In:  
*Journal of the Structural Division* 103 (1977), Nr. 3, S. 679–694